



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

---

**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA  
MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

**“ROBUSTEZ DE LA ESTIMACIÓN DE  
ESTADO EN SEP'S POR EL MÉTODO  
DE CUADRADOS MÍNIMOS”**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
Maestro en Ciencias en Ingeniería Eléctrica

PRESENTA

**Ing. Daniel Felipe Ávila Álvarez**

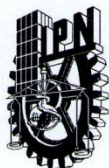
DIRECTOR DE TESIS

**Dr. David Romero Romero**



---

México, D.F., Agosto 2012



# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

## ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de MEXICO D. F. siendo las 11:00 horas del día 6 del mes de JUNIO del 2012 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de la E.S.I.M.E. ZAC. para examinar la tesis titulada:

**“ROBUSTEZ DE LA ESTIMACIÓN DE ESTADO EN SEP’S POR EL MÉTODO DE CUADRADOS MÍNIMOS”**

Presentada por el alumno:

<u>ÁVILA</u>	<u>ÁLVAREZ</u>	<u>DANIEL FELIPE</u>							
Apellido paterno	Apellido materno	Nombre(s)							
Con registro: <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px;">A</td> <td style="padding: 2px;">1</td> <td style="padding: 2px;">0</td> <td style="padding: 2px;">0</td> <td style="padding: 2px;">4</td> <td style="padding: 2px;">4</td> <td style="padding: 2px;">8</td> </tr> </table>			A	1	0	0	4	4	8
A	1	0	0	4	4	8			

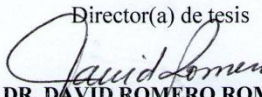
aspirante de:

**MAESTRÍA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**


Después de intercambiar opiniones, los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

### LA COMISIÓN REVISORA

Director(a) de tesis

  
**DR. DAVID ROMERO ROMERO**

  
**DR. DANIEL OLGUÍN SALINAS**  
PRESIDENTE

  
**DR. RICARDO OCTAVIO ARTURO  
MOTA PALOMINO**  
SECRETARIO

  
**DR. JAIME ROBLES GARCÍA**  
SEGUNDO VOCAL

  
**DR. GERMAN ROSAS ORTIZ**  
TERCER VOCAL

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

  
**DR. MAURO ALBERTO ENCISO AGUILAR**



*JFZ*



## **INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

### **CARTA CESIÓN DE DERECHOS**

En la Ciudad de México, Distrito Federal, el día **13** del mes de **Junio** del año **2012**, el que suscribe **DANIEL FELIPE ÁVILA ÁLVAREZ**, alumno del Programa de **Maestría en Ciencias con especialidad en Ingeniería Eléctrica** con número de registro **A100448**, adscrito a la **Sección de Estudios de Posgrado e Investigación** de la **ESIME Unidad Zacatenco**, manifiesta que es autor intelectual del presente Trabajo de Tesis bajo la dirección del **Dr. David Romero Romero** y cede los derechos del trabajo titulado: **"Robustez de la Estimación de Estado en SEP'S por el Método de Cuadrados Mínimos"**, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, graficas o datos del trabajo sin permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo la siguiente dirección: **ing.daniel.avila@gmail.com** y/o **dromero@ipn.mx**.

Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Ing. Daniel Felipe Ávila Álvarez

## AGRADECIMIENTOS

*Primero que nada agradecer a Dios por permitirme cumplir un nuevo objetivo en mi vida y llenarme de salud, bienestar y bendiciones para poder alcanzarlo.*

*A mis padres y hermana por su apoyo incondicional recibido siempre, por acordarse de mí todos los días y creer ciegamente en mis sueños y metas. ¡Este logro también es de ustedes!*

*A Berenice por ser esa persona especial y el motor que me impulsa a diario a ser un excelente ser humano y un mejor profesionista. Solo tú sabes el esfuerzo que ha costado este reto... ¡gracias por estar ahí en las buenas y en las malas, y no dejarme caer nunca!*

*Al Dr. David Romero Romero por el interés mostrado en el desarrollo de este trabajo. Sus consejos y conocimientos transmitidos fueron una base fundamental para realizar esta investigación.*

*A mis amigos y compañeros que se encargaron de hacer más amena esta etapa de mi vida, y estar ahí apoyando y alentando en esos momentos cuando las cosas se tornaban un tanto complicadas.*

*Al Instituto Politécnico Nacional y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el estímulo económico brindado para la realización de mis estudios de posgrado.*

## RESUMEN

En esta tesis se desarrolló un algoritmo computacional de estimación de estado que emplea el método de Newton a través de la formulación de los cuadrados mínimos ponderados. Se analiza la robustez numérica del Jacobiano de mediciones  $H$  y la matriz de ganancia  $G$ , empleadas en el proceso de estimación, utilizando el número de condición.

El estudio comienza a partir de la obtención de las mediciones del sistema a través de un estudio de flujos de potencia previamente realizado. Las mediciones consideradas en el proceso son voltajes nodales, flujos de potencia activa y reactiva e inyecciones de potencia activa y reactiva. Estas mediciones, antes de ser procesadas, son afectadas de manera aleatoria por una incertidumbre de  $\pm 10\%$  con la finalidad de obtener una nueva medición con error. Con ayuda de dichas mediciones se obtiene el Jacobiano  $H$  y demás matrices y vectores empleados en el proceso iterativo de la estimación.

Una vez estimado el estado del sistema, se realiza el análisis de robustez numérica con el método de descomposición en valores singulares, el cual brinda la posibilidad de conocer el rango del Jacobiano  $H$  y la matriz de ganancia  $G$ , sus valores singulares, número de condición y a qué distancia se encuentra cada una de la singularidad.

Se analizan dos redes diferentes, de 5 y 14 nodos respectivamente, con distintas configuraciones en la cantidad y ubicación de las mediciones. Los resultados muestran que el contar con una mayor cantidad de mediciones, no implica una mejor robustez numérica en las matrices analizadas.

También se detectó que la existencia de mediciones de inyecciones de potencia afectan la robustez numérica de la matriz de ganancia  $G$ , mientras que las mediciones de magnitud de voltaje contribuyen a que dicha matriz este mejor condicionada.

## ABSTRACT

In this thesis a computational algorithm for state estimation is developed, it uses Newton's method through the weighted least squares formulation. Numerical robustness of the measurement Jacobian  $H$  and the gain matrix  $G$  used in the estimation process is analyzed, utilizing the condition number.

The study begins from the measurements obtained the system through a power flow study previously conducted. The measurements considered in the process are nodal voltages, active and reactive power flows, and active and reactive power injections. These measurements, before being processed, are randomly affected by an uncertainty of  $\pm 10\%$  in order to get a new measurement with error. Using these measurements, the Jacobian  $H$  and other matrices and vectors used in the iterative process of estimation are obtained.

Once the system state is estimated, a numerical robustness analysis is performed using the singular value decomposition method, which offers the possibility to know the rank of the Jacobian  $H$  and the gain matrix  $G$ , its singular values, condition number and how far away there are from singularity.

Two different networks have been analyzed, 5 and 14 nodes respectively, with different configurations on the number and location of measurements. The results show that having a greater number of measures do not imply a better numerical robustness in the matrices analyzed.

We also detected that the existence of power injections measurements affect the numerical robustness of the matrix gain  $G$ , while the voltage magnitude measurements contribute to this matrix to be better conditioned.

# CONTENIDO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS .....	II
CARTA DE CESIÓN DE DERECHOS .....	III
AGRADECIMIENTOS.....	IV
RESUMEN.....	V
ABSTRACT .....	VI
CONTENIDO.....	VII
ÍNDICE DE FIGURAS .....	XI
ÍNDICE DE TABLAS.....	XIII
SIGLAS Y SIMBOLOGÍA .....	XVI
CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN .....	2
1.1. ANTECEDENTES .....	2
1.2. OBJETIVO .....	5
1.3. JUSTIFICACIÓN .....	5
1.4. ESTADO DEL ARTE.....	5
1.5. CONTRIBUCIÓN DE LA TESIS .....	10
1.6. ESTRUCTURA DE LA TESIS .....	11
CAPÍTULO 2. ROBUSTEZ NUMÉRICA EN CÁLCULOS COMPUTACIONALES DE MATRICES .	14
2.1. INTRODUCCIÓN .....	14
2.2. DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES (SVD).....	14
2.3. LA SVD Y EL PROBLEMA DE CUADRADOS MÍNIMOS .....	18
2.3.1. LA PSEUDOINVERSA.....	21
2.4. APLICACIONES BÁSICAS DE LOS VALORES SINGULARES [28] .....	23
2.4.1. RELACIÓN CON LA NORMA Y NÚMERO DE CONDICIÓN.....	24
2.4.2. DETERMINACIÓN DE RANGO NUMÉRICO .....	28
2.4.3. DESCOMPOSICIÓN ORTOGONAL [21, 24, 30, 31].....	31
2.4.4. DISTANCIA MAS CERCANA A LA MATRIZ SINGULAR .....	31
2.4.5. OTRAS APLICACIONES .....	32
2.5. SENSIBILIDAD DEL PROBLEMA DE CUADRADOS MÍNIMOS [21, 22, 24, 27].....	33
2.5.1. EL EFECTO DE LAS PERTURBACIONES DE $\mathbf{b}$ [21, 23].....	34
2.5.2. EL EFECTO DE LAS PERTURBACIONES DE $\mathbf{A}$ [22, 23] .....	36
2.6. CONDICIONAMIENTO DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES [68, 69] .....	37

---

CAPÍTULO 3. ESTIMACIÓN DE ESTADO EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA .....	42
3.1. MODELO MATEMÁTICO .....	42
3.2. MEDICIONES EN TIEMPO REAL .....	45
3.3. DETECCIÓN E IDENTIFICACIÓN DE DATOS ERRÓNEOS .....	46
3.3.1. CLASIFICACIÓN DE LAS MEDICIONES .....	46
3.3.2. DETECCIÓN DE DATOS ERRÓNEOS.....	47
3.3.2.1. PRUEBA $\chi^2$ PARA DETECCIÓN DE MEDIDAS ERRÓNEAS .....	47
3.3.3. IDENTIFICACIÓN DE DATOS ERRÓNEOS .....	48
3.3.3.1. PRUEBA DEL MAYOR RESIDUO NORMALIZADO $r_{max}^N$ .....	48
3.4. ANÁLISIS DE OBSERVABILIDAD .....	49
3.5. MODELADO DE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN [32] .....	50
3.5.1. LÍNEAS DE TRANSMISIÓN CORTAS Y MEDIANAS.....	51
3.6. MODELADO DE LA RED DE ADMITANCIA [15].....	53
3.7. ESTIMACIÓN DE MÁXIMA VEROSIMILITUD .....	56
3.7.1. FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD GAUSSIANA.....	57
3.7.2. LA FUNCIÓN OBJETIVO.....	59
3.8. ALGORITMO DE ESTIMACIÓN DE ESTADO POR CUADRADOS MÍNIMOS .....	60
3.8.1. FUNCIÓN DE MEDICIONES, $\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)$ [4].....	61
3.8.2. VECTOR DE MEDICIONES, $\mathbf{z}$ [14] .....	63
3.8.3. JACOBIANO DE MEDICIONES, $\mathbf{H}$ [15].....	64
3.8.4. MATRIZ DE GANANCIA, $\mathbf{G}$ .....	66
3.9. DIAGRAMA DE BLOQUES DEL ESTIMADOR DE ESTADO .....	67
 CAPÍTULO 4. PRUEBAS Y RESULTADOS.....	 70
4.1. ESTUDIO DE FLUJOS DE POTENCIA DEL SISTEMA STAGG .....	71
4.2. ROBUSTEZ DE LA ESTIMACIÓN DE ESTADO DEL SISTEMA STAGG .....	72
4.2.1. CASO BASE.....	73
4.2.2. CASO 2: ELIMINACIÓN DE INYECCIÓN EN NODO 3.....	78
4.2.3. CASO 3: ELIMINACIÓN DE INYECCIONES EN LOS NODOS 3 Y 5 .....	82
4.2.4. CASO 4: ELIMINACIÓN DE UN MEDIDOR DE VOLTAJE Y DOS INYECCIONES ....	85
4.2.5. CASO 5: ELIMINACIÓN DE 2 MEDIDORES DE VOLTAJE, 2 DE INYECCIONES, Y 4 DE FLUJOS.....	90
4.2.6. CASO 6: ELIMINACIÓN DE 2 MEDIDORES DE VOLTAJE, 2 DE INYECCIONES, Y 5 DE FLUJOS.....	93
4.3. ESTUDIO DE FLUJOS DE POTENCIA DEL SISTEMA IEEE 14.....	95
4.4. ROBUSTEZ DE LA ESTIMACIÓN DE ESTADO DEL SISTEMA IEEE 14.....	97

---



---

4.4.1.	CASO BASE.....	98
4.4.2.	CASO 2: ELIMINACIÓN DE FLUJOS EN LÍNEAS 5-2, 4-5 Y 9-14.....	105
4.4.3.	CASO 3: ELIMINACIÓN DE 3 MEDIDORES DE FLUJOS Y UNO DE VOLTAJE.....	112
4.4.4.	CASO 4: ELIMINACIÓN 3 MEDIDORES DE FLUJOS Y 2 DE INYECCIONES .....	118
4.4.5.	CASO 5: ELIMINACIÓN DE 3 MEDIDORES DE FLUJOS, 2 DE VOLTAJE Y 3 DE INYECCIONES.....	125
4.4.6.	CASO 6: ELIMINACIÓN DE 14 MEDIDORES DE FLUJO, 2 DE VOLTAJE Y 3 DE INYECCIÓN .....	131
4.4.7.	CASO 7: INYECCIÓN "0" EN EL NODO 11, Y ELIMINACIÓN DE MEDIDORES DE FLUJO EN LAS LÍNEAS 5-2, 4-5 Y 9-14.....	132
4.4.8.	CASO 8: INYECCIÓN "0" EN LOS NODOS 2, 11 Y 14, Y ELIMINACIÓN DE 3 MEDIDORES DE FLUJO.....	138
4.5.	ANÁLISIS DE RESULTADOS .....	145
4.5.1.	SISTEMA STAGG .....	145
4.5.2.	SISTEMA IEEE 14.....	147
CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....		153
5.1.	RECOMENDACIONES PARA TRABAJOS FUTUROS .....	155
REFERENCIAS .....		157
APÉNDICE A. ESTUDIO DE OBSERVABILIDAD .....		165
A.1.	MODELO DE RED NODO/RAMA.....	165
A.2.	ANÁLISIS TOPOLÓGICO DE OBSERVABILIDAD [14] .....	167
A.3.	MATRIZ DE GRAM PARA EL ANÁLISIS DE OBSERVABILIDAD .....	168
APÉNDICE B. ESTADÍSTICA.....		171
B.1.	CONCEPTOS BÁSICOS SOBRE CUADRADOS MÍNIMOS .....	171
B.2.	CUADRADOS MÍNIMOS .....	173
APÉNDICE C. PROGRAMA.....		176
C.1.	SUBROUTINA LEE_DATOS .....	176
C.2.	SUBROUTINA MATRIZ_YBUS.....	178
C.3.	SUBROUTINA SVD.....	179
C.4.	EJECUCIÓN DEL PROGRAMA.....	180
C.5.	ARCHIVO DE RESULTADOS .....	181

---

C.6. CÓDIGO DEL PROGRAMA..... 183

## ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 1.1	Evaluación de la Seguridad en tiempo real: Diagrama Funcional [4].....	3
Fig. 2.1	Representación Geométrica de $A$ [23]. .....	16
Fig. 2.2	Representación Gráfica del Teorema de la SVD [23]. .....	16
Fig. 2.3	Como $A$ deforma $\mathbb{R}^n$ ( $n = m = 3$ y $k = 2$ ) [27]. .....	17
Fig. 2.4	Representación de la matriz $A$ [23]. .....	21
Fig. 2.5	Representación de la pseudoinversa de $A$ [23]. .....	22
Fig. 2.6	Relación de los valores singulares de la matriz $A$ [23]. .....	25
Fig. 2.7	Representación de los valores singulares de la matriz inversa $A^{-1}$ [23]. .....	25
Fig. 2.8	Triángulo rectángulo formado por $b$ , $y$ y $r$ . .....	34
Fig. 3.1	Circuito equivalente para una línea de transmisión. ....	50
Fig. 3.2	Representación de una red de dos puertos [32]. .....	50
Fig. 3.3	Línea corta de transmisión [32]. .....	51
Fig. 3.4	Circuito $\pi$ nominal de una línea de transmisión mediana [32]. .....	52
Fig. 3.5	Circuitos que ilustran la equivalencia de fuentes [15]. .....	54
Fig. 3.6	Caída de voltaje $V_a$ de la rama elemental, corriente de rama $I_a$ , corrientes inyectadas $I_m$ e $I_n$ y voltajes de nodo $V_m$ y $V_n$ respecto a la red de referencia [15]. .....	55
Fig. 3.7	Función de Densidad de Probabilidad Gaussiana (Normal) Estándar, $\Phi(u)$ . .....	58
Fig. 3.8	Obtención de un número aleatorio entre 0.9-1.1 p.u. (valor medido 1.0 p.u.). .....	58
Fig. 3.9	Modelo $\pi$ de dos puertos para una rama de red [4]. .....	62
Fig. 3.10	Estructura típica del Jacobiano de mediciones $H$ [15]. .....	64
Fig. 3.11	Diagrama de flujo del algoritmo. ....	68
Fig. 4.1	Mediciones existentes en la red de 2 nodos. ....	70
Fig. 4.2	Sistema de prueba de 5 nodos, Stagg [38]. .....	71
Fig. 4.3	Mediciones del sistema Stagg (Caso Base). ....	73
Fig. 4.4	Mediciones del sistema Stagg (Caso 2). .....	78
Fig. 4.5	Mediciones del sistema Stagg (Caso 3). .....	82
Fig. 4.6	Mediciones del sistema Stagg (Caso 4). .....	86
Fig. 4.7	Mediciones del sistema Stagg (Caso 5). .....	90
Fig. 4.8	Mediciones del sistema Stagg (Caso 6). .....	94
Fig. 4.9	Mensaje de error producido al simular el sistema Stagg (Caso 6). .....	94
Fig. 4.10	Sistema de prueba de 14 nodos, IEEE 14 [39]. .....	95
Fig. 4.11	Mediciones del sistema IEEE 14 (Caso Base). .....	98
Fig. 4.12	Mediciones del sistema IEEE 14 (Caso 2). .....	105

Fig. 4.13	Mediciones del sistema IEEE 14 (Caso 3).....	112
Fig. 4.14	Mediciones del sistema IEEE 14 (Caso 4).....	118
Fig. 4.15	Mediciones del sistema IEEE 14 (Caso 5).....	125
Fig. 4.16	Mediciones del sistema IEEE 14 (Caso 6).....	131
Fig. 4.17	Mediciones del sistema IEEE 14 (Caso 7).....	132
Fig. 4.18	Mediciones del sistema IEEE 14 (Caso 8).....	139
Fig. A.1	Sistema de 8 buses dividido en islas .....	166
Fig. A.2	Sistema de 8 buses dividido en islas observables .....	166
Fig. A.3	Sistema de ocho buses con ramas observables encerradas por líneas punteadas .....	167
Fig. C.1	Ingreso del archivo de datos en la ventana de ejecución del programa. ....	180
Fig. C.2	Ingreso del archivo de resultados en la ventana de ejecución del programa. ....	180
Fig. C.3	Primera sección del archivo de resultados. ....	181
Fig. C.4	Segunda sección del archivo de resultados. ....	182

---

**ÍNDICE DE TABLAS**

Tabla 4.1	Simbología de mediciones. ....	70
Tabla 4.2	Mediciones de voltajes nodales del sistema Stagg. ....	71
Tabla 4.3	Mediciones de flujos de potencia del sistema Stagg. ....	72
Tabla 4.4	Mediciones de inyecciones de potencia del sistema Stagg. ....	72
Tabla 4.5	Valores de $z$ real, $z$ aleatoria y varianza del sistema Stagg (Caso Base). ....	74
Tabla 4.6	Vector de estimación de estado del sistema Stagg (Caso Base). ....	75
Tabla 4.7	Residuos de las mediciones del sistema Stagg (Caso Base). ....	75
Tabla 4.8	Robustez numérica del Jacobiano de mediciones $H$ del sistema Stagg (Caso Base). ....	76
Tabla 4.9	Robustez numérica de la matriz de ganancia $G$ del sistema Stagg (Caso Base). ....	77
Tabla 4.10	Valores de $z$ real, $z$ aleatoria y varianza del sistema Stagg (Caso 2). ....	78
Tabla 4.11	Vector de estimación de estado del sistema Stagg (Caso 2). ....	79
Tabla 4.12	Residuos de las mediciones del sistema Stagg (Caso 2). ....	79
Tabla 4.13	Robustez numérica del Jacobiano de mediciones $H$ del sistema Stagg (Caso 2). ....	80
Tabla 4.14	Robustez numérica de la matriz de ganancia $G$ del sistema Stagg (Caso 2) ....	81
Tabla 4.15	Valores de $z$ real, $z$ aleatoria y varianza del sistema Stagg (Caso 3). ....	82
Tabla 4.16	Vector de estimación de estado del sistema Stagg (Caso 3). ....	83
Tabla 4.17	Residuos de las mediciones del sistema Stagg (Caso 3). ....	83
Tabla 4.18	Robustez numérica del Jacobiano de mediciones $H$ del sistema Stagg (Caso 3) ....	84
Tabla 4.19	Robustez numérica de la matriz de ganancia $G$ del sistema Stagg (Caso 3) ....	84
Tabla 4.20	Valores de $z$ real, $z$ aleatoria y varianza del sistema Stagg (Caso 4). ....	86
Tabla 4.21	Vector de estimación de estado del sistema Stagg (Caso 4). ....	87
Tabla 4.22	Residuos de las mediciones del sistema Stagg (Caso 4). ....	87
Tabla 4.23	Robustez numérica del Jacobiano de mediciones $H$ del sistema Stagg (Caso 4). ....	88
Tabla 4.24	Robustez numérica de la matriz de ganancia $G$ del sistema Stagg (Caso 4) ....	88
Tabla 4.25	Valores de $z$ real, $z$ aleatoria y varianza del sistema Stagg (Caso 5). ....	90
Tabla 4.26	Vector de estimación de estado del sistema Stagg (Caso 5). ....	91
Tabla 4.27	Residuos de las mediciones del sistema Stagg (Caso 5). ....	91
Tabla 4.28	Robustez numérica del Jacobiano de mediciones $H$ del sistema Stagg (Caso 5). ....	92
Tabla 4.29	Robustez numérica de la matriz de ganancia $G$ del sistema Stagg (Caso 5) ....	92
Tabla 4.30	Mediciones de voltajes nodales del sistema IEEE 14. ....	95
Tabla 4.31	Mediciones de flujos de potencia del sistema IEEE 14. ....	96
Tabla 4.32	Mediciones de inyecciones de potencia del sistema IEEE 14. ....	97
Tabla 4.33	Valores de $z$ real, $z$ aleatoria y varianza del sistema IEEE 14 (Caso Base). ....	99

---

Tabla 4.34	Vector de estimación de estado del sistema IEEE 14 (Caso Base).....	100
Tabla 4.35	Residuos de las mediciones del sistema IEEE 14 (Caso Base).....	101
Tabla 4.36	Robustez numérica del Jacobiano de mediciones H del sistema IEEE 14 (Caso Base).....	103
Tabla 4.37	Robustez numérica de la matriz de ganancia G del sistema IEEE 14 (Caso Base).....	104
Tabla 4.38	Valores de z real, z aleatoria y varianza del sistema IEEE 14 (Caso 2).....	105
Tabla 4.39	Vector de estimación de estado del sistema IEEE 14 (Caso 2).....	107
Tabla 4.40	Residuos de las mediciones del sistema IEEE 14 (Caso 2).....	108
Tabla 4.41	Robustez numérica del Jacobiano de mediciones H del sistema IEEE 14 (Caso 2).....	110
Tabla 4.42	Robustez numérica de la matriz de ganancia G del sistema IEEE 14 (Caso 2).....	110
Tabla 4.43	Valores de z real, z aleatoria y varianza del sistema IEEE 14 (Caso 3).....	112
Tabla 4.44	Vector de estimación de estado del sistema IEEE 14 (Caso 3).....	114
Tabla 4.45	Residuos de las mediciones del sistema IEEE 14 (Caso 3).....	115
Tabla 4.46	Robustez numérica del Jacobiano de mediciones H del sistema IEEE 14 (Caso 3).....	116
Tabla 4.47	Robustez numérica de la matriz de ganancia G del sistema IEEE 14 (Caso 3).....	117
Tabla 4.48	Valores de z real, z aleatoria y varianza del sistema IEEE 14 (Caso 4).....	119
Tabla 4.49	Vector de estimación de estado del sistema IEEE 14 (Caso 4).....	120
Tabla 4.50	Residuos de las mediciones del sistema IEEE 14 (Caso 4).....	121
Tabla 4.51	Robustez numérica del Jacobiano de mediciones H del sistema IEEE 14 (Caso 4).....	123
Tabla 4.52	Robustez numérica de la matriz de ganancia G del sistema IEEE 14 (Caso 4).....	124
Tabla 4.53	Valores de z real, z aleatoria y varianza del sistema IEEE 14 (Caso 5).....	125
Tabla 4.54	Vector de estimación de estado del sistema IEEE 14 (Caso 5).....	127
Tabla 4.55	Residuos de las mediciones del sistema IEEE 14 (Caso 5).....	128
Tabla 4.56	Robustez numérica del Jacobiano de mediciones H del sistema IEEE 14 (Caso 5).....	129
Tabla 4.57	Robustez numérica de la matriz de ganancia G del sistema IEEE 14 (Caso 5).....	130
Tabla 4.58	Valores de z real, z aleatoria y varianza del sistema IEEE 14 (Caso 7).....	132
Tabla 4.59	Vector de estimación de estado del sistema IEEE 14 (Caso 7).....	134
Tabla 4.60	Residuos de las mediciones del sistema IEEE 14 (Caso 7).....	135
Tabla 4.61	Robustez numérica del Jacobiano de mediciones H del sistema IEEE 14 (Caso 7).....	137
Tabla 4.62	Robustez numérica de la matriz de ganancia G del sistema IEEE 14 (Caso 7).....	137
Tabla 4.63	Valores de z real, z aleatoria y varianza del sistema IEEE 14 (Caso 8).....	139
Tabla 4.64	Vector de estimación de estado del sistema IEEE 14 (Caso 8).....	141
Tabla 4.65	Residuos de las mediciones del sistema IEEE 14 (Caso 8).....	142
Tabla 4.66	Robustez numérica del Jacobiano de mediciones H del sistema IEEE 14 (Caso 8).....	143
Tabla 4.67	Robustez numérica de la matriz de ganancia G del sistema IEEE 14 (Caso 8).....	144
Tabla 4.68	Análisis de resultados del Jacobiano de mediciones H del sistema Stagg.....	145

---

Tabla 4.69	Análisis de resultados de la matriz de ganancia G del sistema Stagg. ....	146
Tabla 4.70	Análisis de resultados del Jacobiano de mediciones H del sistema IEEE 14. ....	147
Tabla 4.71	Continuación del análisis de resultados del Jacobiano de mediciones H del sistema IEEE 14. ....	148
Tabla 4.72	Análisis de resultados de la matriz de ganancia G del sistema IEEE 14. ....	149
Tabla 4.73	Continuación del análisis de resultados de la matriz de ganancia G del sistema IEEE 14. ....	149

---

## SIGLAS Y SIMBOLOGÍA

### *Siglas*

SCADA	Control de Supervisión y Adquisición de Datos (Supervisory Control and Data Acquisition)
EMS	Sistema de Administración de Energía (Energy Management System)
SE	Estimación de Estado (State Estimation)
SEP	Sistema Eléctrico de Potencia
WLS	Mínimos Cuadrados Ponderados (Weighted Least Squares)
SVD	Descomposición en Valores Singulares (Singular Value Decomposition)
LKV	Ley de Kirchhoff de Voltajes
LKC	Ley de Kirchhoff de Corrientes
AEP	American Electric Power

### *Simbología*

$N$	Numero de nodos
$m$	Numero de mediciones
$n$	Numero de variables de estado
$x \in \mathbb{R}^n$	Vector de estado del sistema
$h_i(x)$	Función no lineal que relaciona la medida $i$ con el vector de estado $x$
$\varepsilon$	Vector de error en las mediciones
$z \in \mathbb{R}^m$	Vector de mediciones
$\hat{x}$	Vector de estimación de estado
$Y_{bus}$	Matriz de admitancias de la red
$E$	Valor esperado
$\sigma_i^2$	Varianza del error en la medición $i$
$\mu_i$	Media de la medición $i$
$W$	Matriz de pesos



---

$H(x)$	Matriz Jacobiana
$J(x)$	Función objetivo
$G$	Matriz de ganancia
$r_i$	Vector de residuos de las mediciones
$f_s$	Fondo de escala del medidor
$U$	Matriz ortogonal formada por los vectores singulares izquierdos de $A$
$V$	Matriz ortogonal formada por los vectores singulares derechos de $A$
$\Sigma$	Matriz diagonal que contiene los valores singulares de $A$
$\sigma_i(A)$	$i$ -ésimo valor singular de $A$
$\sigma_{max}(A)$	Valor singular más grande de $A$
$\sigma_{min}(A)$	Valor singular más pequeño de $A$
$A^\dagger$	Pseudoinversa de Moore-Penrose de $A$
$\kappa_2(A)$	Número de condición de $A$ (norma 2)
$P$	Potencia real
$Q$	Potencia reactiva
$R$	Resistencia
$X$	Reactancia
$B$	Susceptancia
$G$	Conductancia
$L$	Inductancia
$C$	Capacitancia
$I$	Corriente
$I_S$	Corriente en el extremo de envío
$I_R$	Corriente en el extremo receptor
$V$	Voltaje
$V_S$	Voltaje en el extremo de envío
$V_R$	Voltaje en el extremo receptor
$z$	Impedancia en serie por unidad de longitud
$y$	Admitancia en derivación por unidad de longitud
$Z$	Impedancia total

---

$Y$	Admitancia total en derivación
$l$	Longitud de línea
$f$	Función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria
$f_m$	Función de probabilidad
$P_{ij}$	Flujo de potencia real del nodo $i$ al nodo $j$
$Q_{ij}$	Flujo de potencia reactiva del nodo $i$ al nodo $j$
$P_i$	Inyección de potencia real en el nodo $i$
$Q_i$	Inyección de potencia reactiva en el nodo $i$
$ I_{ij} $	Magnitud del flujo de corriente del nodo $i$ al nodo $j$
$V_i$	Magnitud de voltaje del nodo $i$
$\theta_i$	Ángulo de fase del nodo $i$
$\theta_{ij}$	Desfase entre los nodos $i$ y $j$
$G_{ij} + B_{ij}$	Elemento $ij$ -ésimo de la matriz de admitancias del sistema
$g_{ij} + b_{ij}$	Admitancia de la rama en serie conectada entre el nodo $i$ y $j$
$g_{si} + b_{si}$	Admitancia de la rama en derivación conectada en el nodo $i$
$DR$	Distancia relativa

CAPÍTULO I –  
INTRODUCCIÓN

# CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

## 1.1. ANTECEDENTES

Los sistemas de potencia están formados por sistemas de generación, transmisión, sub-transmisión y distribución. Los sistemas de transmisión pueden contener un gran número de subestaciones que están interconectadas por líneas de transmisión, transformadores y otros dispositivos necesarios para la protección y control del sistema.

En un principio los sistemas eléctricos se encontraban aislados entre sí, posteriormente por motivos de seguridad y economía estos se fueron interconectando, dando como resultado redes cada vez más complejas. Uno de los principales inconvenientes de dicha interconexión consiste en la posibilidad de que una perturbación en el sistema se extienda a áreas mucho mayores, lo que orilló a las compañías eléctricas a instalar sistemas de monitoreo de datos como el denominado sistema de Control de Supervisión y Adquisición de Datos (SCADA por sus siglas en inglés), que fue reemplazado por lo que hoy en día se conoce como el Sistema de Administración de Energía (EMS por sus siglas en inglés), el cual incorpora entre otras muchas funciones el control automático de generación, el despacho económico y el control de la frecuencia del sistema [1].

Toda esta información recabada en el SCADA tiene como objetivo principal conocer el estado del sistema en tiempo real y así poder llevar el seguimiento y el control de la seguridad con solo introducir las medidas en los programas de control. Pero no fue así y fue Schweppe quien sugirió que la solución se basaba en aplicar los conceptos de estimación de estado [2, 3].

El estimador de estado incluye las siguientes funciones [4]:

- *Procesador topológico*: Obtiene el modelo eléctrico de la red mediante el estado de los seccionadores e interruptores.

- *Análisis de observabilidad:* Determina si puede ser realizada la estimación de estado sobre toda la red, en caso contrario identifica las ramas no observables y las islas observables en el sistema si es que existen.
- *Solución de la Estimación de Estado:* Estima el estado óptimo del sistema, compuesto por los voltajes nodales complejos, basados en el modelo y mediciones de la red. Ofreciendo la mejor estimación para los flujos de las líneas, cargas, taps de transformadores y salidas de generación.
- *Procesamiento de datos erróneos:* Identifica la existencia de errores sustanciales en el conjunto de mediciones. Si la redundancia lo permite, identifica y elimina las medidas erróneas.
- *Procesamiento de errores estructurales o de parámetro:* Estima varios parámetros de la red, como el modelo de la línea de transmisión, cambiador de derivación de transformadores, capacitores o reactores en derivación. Detecta errores estructurales en la configuración de la red e identifica el estado erróneo en interruptores a partir de mediciones redundantes.

Es por esto que un estimador de estado trabajando en tiempo real permite obtener una base de datos confiable, necesaria para el correcto funcionamiento de las actividades involucradas en el control y operación del sistema.

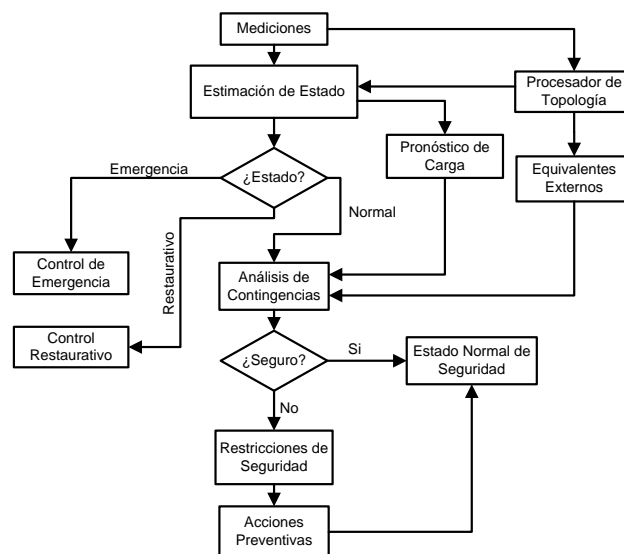


Fig. 1.1 Evaluación de la Seguridad en tiempo real: Diagrama Funcional [4].

La figura 1.1 muestra el análisis de los datos y la interfaz entre las funciones de las aplicaciones que intervienen en el proceso de la evaluación de seguridad en tiempo real. Las mediciones incluyen el cambio y las posiciones de los interruptores en la subestación, que son analizadas a través de un procesador de topología, que a su vez genera un modelo bus/rama a partir del modelo del sistema de potencia.

Este modelo incluye todos los nodos dentro del área del centro de control EMS, así como los nodos seleccionados de los sistemas vecinos. Toda la información obtenida de los sistemas vecinos se emplea para crear y actualizar el modelo del sistema externo, dentro del cual pueden existir puntos no observables debido a datos erróneos, fallas inesperadas, falta de mediciones, etc.

Estas áreas, ya sea que estén físicamente ubicadas dentro del área de control o sean parte de un sistema externo, se estiman a través del uso de pseudomediciones. Las pseudomediciones pueden ser generadas a partir de predicciones de carga a corto plazo, despacho de generación, registros históricos, etc. [2].

Pueden existir dentro del sistema nodos de paso, es decir, aquellos nodos que no cuentan con generación ni carga por lo que su inyección neta de potencia activa o reactiva es cero y no son medidas. Estas inyecciones se pueden emplear como mediciones libres de errores y representadas como "mediciones virtuales".

Con la finalidad de clasificar el estado del sistema, los resultados obtenidos por el estimador de estado se comprueban; estado normal, el análisis de contingencia se aplica para determinar la seguridad del sistema. En caso de condiciones inseguras, se implementan acciones de control preventivas que son calculadas mediante el uso de software; estado de seguridad, se logra implementando acciones preventivas; estado de emergencia, se presenta cuando existe una contingencia o cuando se deben implementar acciones restaurativas [4].

## **1.2. OBJETIVO**

El objetivo de esta tesis es analizar la robustez numérica de un estudio de estimación de estado mediante la formulación de cuadrados mínimos ponderados utilizando el número de condición, ante diferentes tipos de mediciones como flujos, inyecciones nodales y magnitudes de voltaje. Con esta evaluación se pretende identificar efectos de los diferentes tipos de medición sobre la robustez de las matrices empleadas en el proceso de estimación.

## **1.3. JUSTIFICACIÓN**

La ejecución satisfactoria de la estimación de estado en los sistemas eléctricos modernos ha fomentado la implementación de estimadores que abarcan redes cada vez más grandes. Esto implica [1]:

- Mayores porcentajes de la red externa que se representa
- Mal condicionamiento numérico
- Lentitud y fallas en la convergencia de la solución

El método de los cuadrados mínimos ponderados tiene como objetivo minimizar los residuos y proporcionar de manera rápida y eficiente los valores de las variables del sistema, partiendo de factores individuales de ponderación [2].

Partiendo de las ventajas que proporcionan los cuadrados mínimos, y haciendo uso de la descomposición en valores singulares para conocer el rango numérico y el número de condición de las matrices empleadas en el proceso de estimación de estado, se decide realizar el presente trabajo de tesis.

## **1.4. ESTADO DEL ARTE**

Cuando en los 60's ocurrió el incidente que dejó sin suministro de energía eléctrica al noroeste de Estados Unidos, las empresas eléctricas tomaron conciencia de que debían

desarrollar nuevas técnicas para la operación de los sistemas de potencia que les garantizaran un elevado nivel de seguridad [1].

Este apagón y otros tipos de incidentes, manifestaron la falta de atención prestada a la seguridad de la operación del sistema, por lo que se reafirmó la idea de crear sistemas SCADA más sofisticados que los entonces empleados. Partiendo de esta situación el esfuerzo se centró en recabar en intervalos de tiempo menores, una mayor cantidad de información, con lo que se buscaba comprobar la seguridad del sistema continuamente.

Debido a la incertidumbre de ciertas mediciones, la inconsistencia en otras y la imposibilidad de aprovechar todos los datos disponibles, resultó complejo obtener el estado de seguridad del sistema a partir de la base de datos actualizada del SCADA. Ante esta situación fue Fred Schweppe quien sugirió aplicar la estimación de estado para darle solución al problema. El estimador de estado permite obtener una base de datos robusta, es por esto que relacionándolo con los sistemas SCADA convencionales y la sorprendente evolución computacional, se dio lugar a los modernos Sistemas de Administración de Energía (EMS) los cuales cuentan con un estimador de estado en tiempo real [1, 4].

La solución al problema de la estimación de estado en sistemas de potencia formulado por cuadrados mínimos, se basa en el método de Gauss Newton, que a diferencia del método de Newton Raphson, ignora los términos de segundo orden, lo cual no afecta la convergencia de la solución [5]. Schweppe se enfocó en indagar acerca del uso de modelos desacoplados, y posteriormente Dopazo propuso un método basado únicamente en procesar las mediciones de los flujos de potencia de las líneas, mostrando mayor velocidad de resolución y una precisión numérica confiable [7].

Este tipo de métodos de rápida convergencia son de gran utilidad en los centros de control de energía debido a su rápido funcionamiento y reducción de recursos computacionales, sin embargo la mayoría sigue presentando restricciones en el manejo de ruido en las señales [6, 7].



Posteriormente se comenzaron a aplicar métodos matemáticos más confiables para ayudar a la convergencia del proceso de estimación, y evitar la mala condición numérica que se llega a presentar con el método convencional de Gauss. Uno de ellos es la aplicación de las transformaciones ortogonales [41], cuyo método presenta características numéricas mejoradas, ya que evita el cálculo explícito de matrices de la forma  $G^T G$  y se basa en aplicaciones sucesivas de matrices ortogonales, que están perfectamente condicionadas. Otro método también basado en transformaciones ortogonales, está enfocado en el uso de las rotaciones de Givens [42], en el cual se procesa una fila de la matriz Jacobiana a la vez, disminuyendo considerablemente el número de multiplicaciones que se presentan. La aplicación de las rotaciones de Givens también presenta algunas características ventajosas en cuanto a la detección e identificación de datos erróneos [43].

En 1995 se implementó en el estimador de estado de Sevillana de Electricidad la medición de ángulos de fase. Esto se logró a través de la sincronización de las Unidades Medidoras Fasoriales o PMU's (por sus siglas en inglés) con el reloj satelital, encontrando que dichas mediciones proporcionan información valiosa sobre la red y mejoran la estimación de estado, ya que complementan a las demás medidas [44].

Siguiendo a dicha implementación, surgieron nuevos trabajos empleando PMU's, con el objetivo de mejorar la precisión de la estimación de estado. Mediante la utilización de los Sistemas de Posicionamiento Global o GPS (por sus siglas en inglés), se identifican los lugares más convenientes para ubicar la PMU y lograr una exactitud en la medición fasorial mejor que  $0.01^\circ$ . Esto convierte a la medición de ángulo de fase en una importante fuente de datos para la estimación del estado [45].

Otra característica a destacar de las PMU's, es que también ayudan a mejorar la observabilidad de la red a partir de un menor número de mediciones requeridas para lograr que una misma región sea observable. Las mediciones fasoriales complementan a las mediciones restantes, por lo que estas mediciones no fasoriales son igual de importantes y no deben ser ignoradas [46].

Con la finalidad de hacer frente a los problemas de dimensionalidad, volumen de información procesada y exigencia de alta velocidad en software de los sistemas de potencia modernos, existen estudios que abordan la descomposición estructural y funcional del problema de estimación de estado [47, 48]. La descomposición estructural sugiere dividir los esquemas de cálculo en subsistemas, así como la colocación de PMU's en los nodos frontera para lograr la solución de los subsistemas separados. La descomposición funcional se realiza de acuerdo a los problemas resueltos en la estimación de estado: detección e identificación de datos erróneos y estimación de estado basada en criterios cuadráticos y robustos.

También se ha propuesto la utilización de sistemas multi-agente, fundamentados en métodos de inteligencia artificial, que conforman una red de agentes que trabajan en conjunto para resolver problemas que son imposibles de resolver para un agente individual [49]. Dichos sistemas se basan en la descomposición estructural y funcional del problema de estimación de estado [47, 48].

Debido al gran tamaño de los sistemas de potencia actuales y a la dificultad de convergencia que pueden llegar a presentar, han surgido algoritmos de estimación de estado distribuida [59, 60], los cuales consisten en dividir a la red en subsistemas y hacer uso de dispositivos sincronizados a través de GPS (relés, PMU's, medidores). La solución de estimación de estado se obtiene a partir de la solución distribuida de cada subsistema, mediante un análisis de sensibilidad basado en la actualización de los buses frontera elegidos. El algoritmo propuesto por Heydt en [59], es capaz de localizar las PMU's y determinar el nodo de referencia en cada subsistema de la red, con la finalidad de coordinar la solución de estimación de estado distribuida. También disminuye considerablemente el tiempo de cálculo en la obtención de soluciones para grandes áreas interconectadas.

En comparación con un estimador de estado tradicional, el distribuido presenta las siguientes ventajas [60]: Utilización de modelos del sistema completamente trifásicos (mejor precisión), utilización de todos los datos disponibles a nivel subestación (mayor

redundancia, es decir, mayor cantidad de mediciones que de variables de estado), minimización de los datos que se transfieren (cálculos locales sobre una base distribuida).

Otro planteamiento muy útil para SEP's a gran escala, es la estimación de estado diakóptica [61], cuya idea consiste en la eliminación de líneas de interconexión para descomponer geográficamente todo el sistema en una serie de subsistemas, evaluar la solución de estimación de estado distribuida para cada subsistema, y así poder obtener la solución agregada de toda la red. La matriz de incidencias del sistema es utilizada para aplicar el algoritmo de estimación de estado por cuadrados mínimos ponderados o WLS (por sus siglas en inglés) a la configuración distribuida.

Por otra parte han surgido otras técnicas para abordar las famosas redes inteligentes o smart grids. Gómez Expósito [63] plantea una estimación de estado multinivel la cual facilita la integración de los estimadores ya existentes. Se hace uso de la nueva tecnología referente a sensores, procesamiento de señales y protocolos de comunicación, con la finalidad implementar un sistema jerárquico en el que incluso los sistemas eléctricos de grandes dimensiones puedan ser monitoreados de manera eficiente y precisa.

Más recientemente se han presentado nuevas formulaciones a partir de la estimación de estado WLS. Una de ellas se basa en la formulación de cuadrados mínimos regularizados [66], cuyo objetivo es hacer frente a los problemas mal planteados que surgen a partir de la falta de mediciones en el sistema, calculando las varianzas de los flujos de potencia estimados, permitiendo la identificación de regiones observables y no observables. En esta formulación el análisis de observabilidad se vuelve parte del análisis del problema, en lugar de ser un impedimento para el cálculo.

Otra formulación presenta una metodología de estimación de estado de tres etapas, basada en la solución secuencial de dos problemas lineales de cuadrados mínimos ponderados con una transformación explícita no lineal en medio [67]. Esto resulta en un proceso no iterativo, el cual proporciona prácticamente la misma solución que el esquema iterativo de Gauss-Newton, surgido del método convencional WLS.

En la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación del IPN Zacatenco se han realizado algunos trabajos referentes. El primero de ellos sugiere variantes en el método empleando formulaciones de flujos de potencia estocástico y estimación, considerando incertidumbre en los datos de entrada y representando los resultados como límites de confianza [8].

El método robusto de la mediana mínima cuadrada, del que derivan los métodos de la mediana mínima cuadrada podada y el de punto de inutilización, es empleado para obtener el estado del sistema a partir de un determinado número de submuestras, en donde se calculan los residuos de las mediciones, se obtiene su mediana y por último el vector de estado del sistema [9].

Otro trabajo desarrollado en este centro de estudios se enfocó en la formulación de los cuadrados mínimos ponderados, empleando el método de Newton que ignora los términos de segundo orden, en el cual, mediante el procesamiento de las diversas mediciones que se tienen del sistema, se estima el vector de estado de éste [10].

## **1.5. CONTRIBUCIÓN DE LA TESIS**

Conocer el estado estimado de la red, así como la robustez numérica del Jacobiano de mediciones  $H$  y la matriz de ganancia  $G$ , a partir de una descomposición en valores singulares. Efectuar un análisis para diferentes configuraciones de cada uno de los sistemas de prueba, partiendo de un conjunto suficiente de mediciones, hasta alcanzar un mínimo en las lecturas de entrada, ocasionando la no observabilidad de la red.

Incluir diferentes tipos de mediciones a la entrada, tales como magnitudes de voltaje, flujos de potencia activa y reactiva, inyecciones de potencia activa y reactiva, y la consideración en ciertos casos de estudio, de nodos de paso o inyecciones cero en la red. Describir el proceso necesario para llevar a cabo el análisis correspondiente de observabilidad del sistema e identificar las áreas que no son aptas para someterse al estudio de estimación.

A través de la obtención de los valores singulares de las matrices  $H$  y  $G$ , conocer el número de condición de estas, e identificar qué caso resulta ser el mejor condicionado numéricamente. El número de condición indica la distancia a la que se encuentra la matriz analizada de la matriz singular más cercana.

## 1.6. ESTRUCTURA DE LA TESIS

- **Capítulo I – Introducción:** Se proporciona una breve introducción al problema de la estimación de estado, así como una pequeña reseña histórica de este, que incluye la mención de algunos trabajos realizados asociados. Se define el objetivo, justificación y alcance de la presente tesis.
- **Capítulo II – Robustez Numérica en Cálculos Computacionales de Matrices:** Se puntualiza la teoría general que describe el proceso de la descomposición en valores singulares (SVD) en matrices cuadradas y rectangulares, las ventajas que proporciona dicho análisis al emplearlo en matrices de grandes dimensiones, y que significa el número de condición de una matriz; calculado en el Jacobiano de mediciones  $H$  y la matriz de Ganancia  $G$  empleadas en el proceso de estimación.
- **Capítulo III – Estimación de Estado en Sistemas Eléctricos de Potencia:** En este capítulo se describen de manera general algunos conceptos básicos del problema de estimación, se explica de forma breve su modelo matemático, los tipos de mediciones que existen, así como los métodos empleados para detectar e identificar medidas erróneas. También se presenta un análisis de las líneas de transmisión y su modelo matemático, se detalla más el proceso de la estimación de estado en SEP's analizando la función de distribución de las mediciones disponibles, y se presenta la metodología para desarrollar el algoritmo por cuadrados mínimos ponderados, por último se ilustra el diagrama de flujo del programa elaborado para el desarrollo del trabajo.
- **Capítulo IV – Pruebas y Resultados:** Se analizan dos sistemas de prueba diferentes de 5 y 14 nodos, cada uno simulado en diversas configuraciones; se realiza un análisis matemático mediante la SVD del Jacobiano de mediciones  $H$  y la matriz de ganancia  $G$ , para determinar qué configuración resulta ser la más robusta

numéricamente y qué tipo de mediciones influyen en el condicionamiento de estas matrices. Cada sistema de prueba es llevado al límite realizando simulaciones con un mínimo de mediciones para examinar su comportamiento.

- **Capítulo V – Conclusiones y Recomendaciones:** Con base en los resultados obtenidos en cada una de las pruebas realizadas, se presentan las conclusiones pertinentes, así como una serie de recomendaciones útiles para futuras investigaciones en el tema.

## CAPÍTULO II –

# ROBUSTEZ NUMÉRICA EN CÁLCULOS COMPUTACIONALES DE MATRICES

## CAPÍTULO 2. ROBUSTEZ NUMÉRICA EN CÁLCULOS COMPUTACIONALES DE MATRICES

### 2.1. INTRODUCCIÓN

Actualmente existen nuevos métodos para realizar estudios de estimación de estado robusta [4, 9, 50, 51, 54], sin embargo, debido a la desconfianza de las empresas suministradoras de energía a la actualización de los ya existentes por uno más confiable, se sigue trabajando con aplicaciones que requieren de la solución de problemas de cuadrados mínimos con una matriz de coeficientes y un vector de mediciones [61, 66, 67].

Se han desarrollado varios métodos numéricos para resolver el problema de cuadrados mínimos, siendo los más interesantes los basados en las transformaciones ortogonales debido a que ayudan a mejorar la convergencia del estimador [41, 42, 43].

La descomposición  $QR$  es una herramienta muy útil para resolver problemas de cuadrados mínimos cuando se sabe que la matriz de coeficientes tiene rango completo. El problema de dicha herramienta surge cuando la matriz no tiene rango completo, o éste se desconoce, por lo que es necesario emplear una técnica más poderosa. Una de ellas podría ser la descomposición  $QR$  con columna pivote. Sin embargo, la descomposición en valores singulares (SVD) resulta ser una herramienta mucho más eficaz, la cual puede considerarse como la descomposición de matrices más importante de todas, tanto para fines teóricos como computacionales; debido a que puede tomar una variedad de formas, detectar el rango de una matriz aún con presencia de errores de redondeo y otras incertidumbres, así como resolver problemas de cuadrados mínimos, entre otras cosas [21, 23, 24, 30, 31].

### 2.2. DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES (SVD)

La SVD está relacionada con la teoría de la diagonalización de una matriz simétrica [27]. Si  $A$  es una matriz real de dimensiones  $m \times n$ , entonces existen un par de matrices ortogonales definidas por  $U$  y  $V$ , y una matriz diagonal representada por  $\Sigma$ , de tal manera



que  $A = U\Sigma V^T$ . La dimensión de  $U$  es  $m \times m$  y la de  $V$  es  $n \times n$ , mientras que  $\Sigma$  es rectangular con la misma dimensión de  $A$ . Los valores diagonales positivos de  $\Sigma$ , que se expresan como  $\sigma_i$ , son llamados valores singulares de  $A$ .

**Teorema 2.2.1 (Teorema SVD).** Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  una matriz distinta de cero con rango  $r$ . Entonces  $A$  puede ser expresada como el producto [21, 22, 23, 25, 26]:

$$A = U\Sigma V^T \quad (2.1)$$

donde  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$  y  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son ortogonales, y  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es una matriz diagonal no cuadrada

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \sigma_r & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$$

La ecuación (2.1) es conocida como descomposición en valores singulares de  $A$ . Las entradas  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  de  $\Sigma$  son los valores singulares de  $A$ . Las columnas de  $U$  son vectores ortonormales llamados vectores singulares izquierdos de  $A$ , mientras que las columnas de  $V$  son los vectores singulares derechos de  $A$ . La SVD de la matriz transpuesta de  $A$  esta dada por  $A^T = V\Sigma^T U^T$  [26].

Una manera alterna de explicar la SVD es mediante una interpretación geométrica simple.

**Teorema 2.2.2 (Teorema Geométrico SVD).** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  una matriz no nula con rango  $r$ . Entonces  $\mathbb{R}^m$  tiene una base ortonormal  $v_1, \dots, v_m$ ,  $\mathbb{R}^n$  tiene una base ortonormal  $u_1, \dots, u_n$ , y existen  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$  tal que [23, 21],

$$Av_i = \begin{cases} \sigma_i u_i, & i = 1, \dots, r \\ 0, & i = r + 1, \dots, m \end{cases} \quad A^T u_i = \begin{cases} \sigma_i v_i, & i = 1, \dots, r \\ 0, & i = r + 1, \dots, n \end{cases} \quad (2.2)$$

Los valores singulares representan las longitudes de los semiejes del elipsoide  $E$  definido por  $E = \{Ax: \|x\|_2 = 1\}$ , y suelen identificarse a través de la siguiente notación,

$$\begin{aligned} \sigma_i(A) &= \text{el } i\text{-ésimo valor singular de } A, \\ \sigma_{\max}(A) &= \text{el valor singular más grande de } A, \\ \sigma_{\min}(A) &= \text{el valor singular más pequeño de } A, \end{aligned}$$

El teorema 2.2.2 expone que la diagonal de la matriz  $\Sigma$  es la matriz de la transformación de  $A$  con respecto a las bases ortonormales  $v_1, \dots, v_m$  y  $u_1, \dots, u_n$ , y por lo tanto,  $\Sigma^T$  es la matriz de transformación de  $A^T$ . La acción de  $A$  se puede representar de forma sencilla en el siguiente diagrama [23].

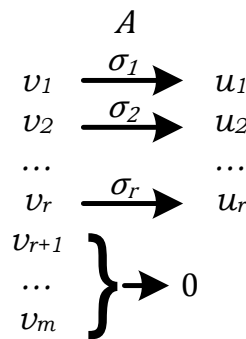


Fig. 2.1 Representación Geométrica de  $A$  [23].

Un diagrama similar es empleado para  $A^T$ . Si se juntan ambos diagramas lado a lado, se obtiene uno que sirve como representación del teorema de la SVD.

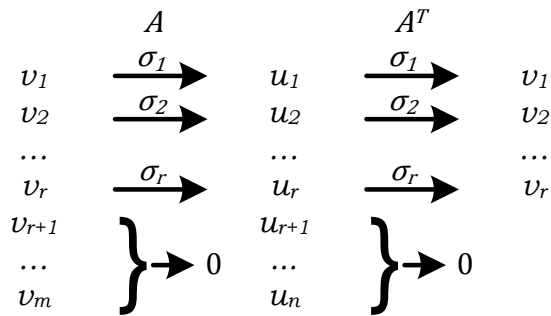


Fig. 2.2 Representación Gráfica del Teorema de la SVD [23].

Otra forma de interpretar el Teorema 2.2.2, es entender cómo se deforma el espacio  $A$  considerando su acción en la esfera unidad  $\mathbb{R}^n$ . Un elemento arbitrario  $x$  de esa esfera unitaria puede ser representado por  $x = x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n$  con  $\sum_1^n x_i^2 = 1$ . La imagen es  $Ax = \sigma_1x_1u_1 + \dots + \sigma_kx_ku_k$ . Dejando  $y_i = \sigma_ix_i$ , se observa que la imagen de la esfera unidad está compuesta de los vectores  $y_1u_1 + y_2u_2 + \dots + y_ku_k$ , donde [27]:

$$\frac{y_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} + \dots + \frac{y_k^2}{\sigma_k^2} = \sum_1^k x_i^2 \leq 1 \quad (2.3)$$

Si  $A$  tiene rango de columna completo, entonces  $r = n$ , la desigualdad es en realidad una igualdad estricta. De lo contrario, algunas de las  $x_i$  faltaran a la derecha, y la suma puede ser cualquier valor de 0 a 1. Esto muestra que los mapas de  $A$  de una esfera unidad de  $\mathbb{R}^n$  es un elipsoide de dimensión  $r$  con semiejes en la dirección  $u_i$  y con magnitudes  $\sigma_i$ . Si  $r = n$  la imagen es solo la superficie del elipsoide, de lo contrario se refleja el elipsoide sólido [22, 28].

Se puede visualizar el efecto de  $A$  de la siguiente manera: si colapsa la dimensión  $n - k$  del dominio, entonces se distorsionan el resto de las dimensiones, produciendo estiramiento y compresión de la  $k$ -esfera unidad en un elipsoide, y finalmente se incorpora el elipsoide en  $\mathbb{R}^m$ . A continuación la figura 2.3 ilustra lo descrito anteriormente.

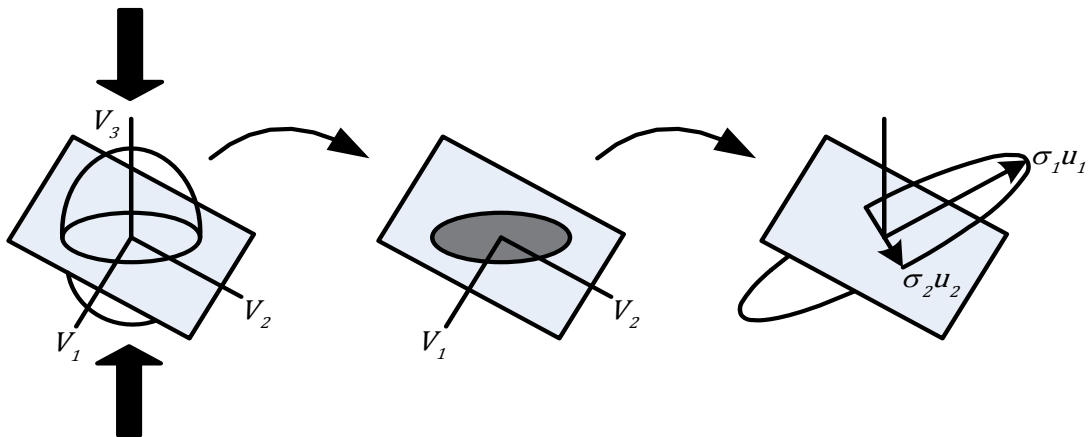


Fig. 2.3 Como  $A$  deforma  $\mathbb{R}^n$  ( $n = m = 3$  y  $k = 2$ ) [27].

Como consecuencia inmediata  $\|A\|$ , la norma operador de  $A$ , definida como el valor máximo de  $|Av|$  para  $v$  en la esfera unidad, es simplemente  $\sigma_1$ , el valor singular mas grande de  $A$ . Dicho de otra manera, se tiene la desigualdad  $|Ax| \leq \sigma_1|x|$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , con igualdad solo cuando  $x$  es un múltiplo de  $v_1$  [22, 27].

El siguiente teorema es una versión más condensada de la descomposición en valores singulares.

**Teorema 2.2.3 (Teorema Condensado SVD).** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  una matriz no nula de rango  $r$ . Entonces existen  $\hat{U} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $\hat{\Sigma} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ , y  $\hat{V} \in \mathbb{R}^{m \times r}$  de tal manera que  $\hat{U}$  y  $\hat{V}$  son isométricos,  $\hat{\Sigma}$  es una matriz diagonal cuyas entradas en la diagonal principal están dadas por  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ , y [22, 23]:

$$A = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^T \quad (2.4)$$

A continuación se presenta una forma más útil de describir la SVD.

**Teorema 2.2.4.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  una matriz no nula de rango  $r$ . Sean  $\sigma_1 \dots \sigma_r$  los valores singulares de  $A$ , con sus correspondientes vectores singulares  $v_1, \dots, v_m$  y  $u_1, \dots, u_m$  derechos e izquierdos respectivamente. Entonces [21, 23, 27]:

$$A = \sum_{j=1}^r \sigma_j u_j v_j^T \quad (2.5)$$

### 2.3. LA SVD Y EL PROBLEMA DE CUADRADOS MÍNIMOS

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $r = \text{rango}(A)$ , y  $b \in \mathbb{R}^n$ , y considerando el siguiente sistema de ecuaciones

$$Ax = b \quad (2.6)$$

con  $x \in \mathbb{R}^m$  desconocido. Si  $n > m$ , entonces el sistema es sobredeterminado, y no se puede encontrar una solución exacta. Por lo tanto se trata de encontrar una  $x$  tal que  $\|b - Ax\|_2$  sea minimizada. Este es exactamente el problema de cuadrados mínimos. Si  $n \geq m$  y  $\text{rango}(A) = m$ , el problema de cuadrados mínimos tiene solución única. Si  $\text{rango}(A) < m$ , la solución no es única; existen muchas  $x$  para las cuales  $\|b - Ax\|_2$  es minimizado. Incluso si  $n < m$ , puede suceder que la ecuación (2.6) no tenga una solución exacta, por lo que también debe contemplarse ese caso [21, 25, 26].

Debido a que la solución del problema de cuadrados mínimos a veces no es único, se tiene que considerar el siguiente problema adicional: de todas las  $x \in \mathbb{R}^m$  que minimizan  $\|b - Ax\|_2$ , se tiene que encontrar una para que  $\|x\|_2$  sea minimizada. Este problema siempre tiene solución única.

Inicialmente se debe suponer que  $A$  y  $b$  son conocidas exactamente, y todos los cálculos se llevan a cabo con exactitud. Se supone que se cuenta con la SVD exacta  $A = U\Sigma V^T$ , donde  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$  son ortogonales, y [23, 27]

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \hat{\Sigma} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\Sigma} = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\},$$

con  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ . Debido a que  $U$  es ortogonal,

$$\|b - Ax\|_2 = \|U^T(b - Ax)\|_2 = \|U^T b - \Sigma(V^T x)\|_2$$

Dejando  $c = U^T b$  y  $y = V^T x$ , tenemos:

$$\|b - Ax\|_2^2 = \|c - \Sigma y\|_2^2 = \sum_{i=1}^r |c_i - \sigma_i y_i|^2 + \sum_{i=r+1}^n |c_i|^2 \quad (2.7)$$

Debe observarse que cuando  $r < m$ ,  $y_{r+1}, \dots, y_m$  no aparecen en (2.7), por lo tanto no tienen ningún efecto sobre el residual y se pueden elegir arbitrariamente. Entre todas las

soluciones obtenidas,  $\|y\|_2$  logra minimizarse cuando y solo cuando  $y_{r+1} = \dots = y_m = 0$ . Debido a que  $x = Vy$  y  $V$  son ortogonales,  $\|x\|_2 = \|y\|_2$ . Por lo tanto  $\|x\|_2$  se minimiza cuando y solo cuando es  $\|y\|_2$ . Esto demuestra que el problema de cuadrados mínimos tiene exactamente una solución de norma mínima [23].

A continuación se presenta en breve desarrollo con matrices particionadas [27]. Sea

$$c = \begin{bmatrix} \hat{c} \\ d \end{bmatrix} \quad y \quad y = \begin{bmatrix} \hat{y} \\ z \end{bmatrix},$$

donde  $\hat{c}, \hat{r} \in \mathbb{R}^r$ . Entonces

$$c - \Sigma y = \begin{bmatrix} \hat{c} \\ d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{\Sigma} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{c} - \hat{\Sigma} \hat{y} \\ d \end{bmatrix},$$

así

$$\|b - Ax\|_2^2 = \|c - \Sigma y\|_2^2 = \|\hat{c} - \hat{\Sigma} \hat{y}\|_2^2 + \|d\|_2^2$$

Esto se minimiza cuando y sólo cuando  $\hat{y} = \hat{\Sigma}^{-1} \hat{c}$ , que es,  $y_i = c_i / \sigma_i, i = 1, \dots, r$ . Se puede elegir  $z$  arbitrariamente, pero se tiene la solución de norma mínima tomando  $z = 0$ . La norma del residuo mínimo es  $\|d\|_2$ . Esto resuelve el problema por completo en principio.

Resumiendo el procedimiento se obtiene algo como lo siguiente [22]:

1. Calcular  $\begin{bmatrix} \hat{c} \\ d \end{bmatrix} = c = U^T b$ .
2. Resolver el sistema diagonal  $\hat{y} = \hat{\Sigma}^{-1} \hat{c}$ .
3. Dejar  $y = \begin{bmatrix} \hat{y} \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$ .
4. Obtener la solución de cuadrados mínimos  $x = Vy$ .

### 2.3.1. LA PSEUDOINVERSA

La pseudoinversa, también conocida como la inversa generalizada de Moore-Penrose, es una generalización interesante de la inversa ordinaria. Aunque en el sentido ordinario solo tienen inversa las matrices cuadradas no singulares, cada  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  tiene una pseudoinversa. Así como la solución de un sistema cuadrado no singular  $Ax = b$  puede ser expresado en términos de  $A^{-1}$  como  $x = A^{-1}b$ , la solución de norma mínima a un problema de cuadrados mínimos con la matriz de coeficientes  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  puede ser expresada en términos de la pseudoinversa  $A^\dagger$  como  $x = A^\dagger b$  [22, 23, 31].

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  con rango  $r$ , su acción está descrita por,

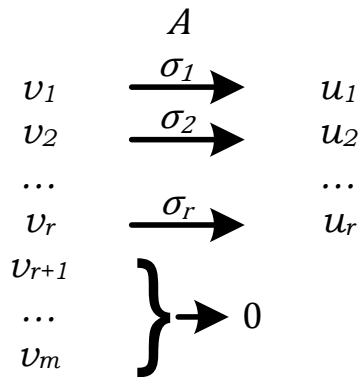


Fig. 2.4 Representación de la matriz  $A$  [23].

Donde  $v_1, \dots, v_m$  y  $u_1, \dots, u_n$  siguen siendo conjuntos completamente ortogonales de vectores singulares derechos e izquierdos respectivamente, y  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$  son los valores singulares distintos de cero de  $A$ . En forma matricial,

$$A = U\Sigma V^T$$

Para poder definir la pseudoinversa  $A^\dagger \in \mathbb{R}^{m \times n}$  de manera que sea lo más parecida posible a una verdadera inversa, se requiere  $A^\dagger u_i = \sigma_i^{-1} v_i$  para  $i = 1, \dots, r$ . Una opción razonable para  $A^\dagger u_{r+1}, \dots, A^\dagger u_n$  es hacer que sean cero [23]. Así se puede definir la

pseudoinversa de  $A$ , que es la matriz  $A^\dagger \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , la cual está representada por la siguiente figura,

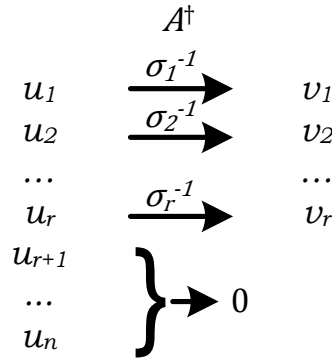


Fig. 2.5 Representación de la pseudoinversa de  $A$  [23].

Debe dejarse en claro que  $\text{rango}(A^\dagger) = \text{rango}(A)$ , además que  $u_1, \dots, u_n$  y  $v_1, \dots, v_m$  son los vectores singulares derecho e izquierdo respectivamente de  $A^\dagger$ , y  $\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_r^{-1}$  son los valores singulares diferentes de cero.

Para ver lo que  $A^\dagger$  representa en general, debe tenerse en cuenta que las ecuaciones [26],

$$A^\dagger u_i = \begin{cases} v_i \sigma_i^{-1}, & i = 1, \dots, r \\ 0, & i = r + 1, \dots, n \end{cases}$$

pueden expresarse como una ecuación matricial única  $A^\dagger U = V \Sigma^\dagger$ , donde  $\Sigma^\dagger$  esta dado por

$$\Sigma^\dagger = \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Así, debido a que  $U$  es ortogonal se obtiene la siguiente expresión, la cual representa la SVD de  $A^\dagger$  en forma matricial [1],

$$A^\dagger = V \Sigma^\dagger U^T \tag{2.8}$$



Si  $\hat{U}$  y  $\hat{V}$  representaran las primeras  $r$  columnas de  $U$  y  $V$  respectivamente, la ecuación (2.8) puede describirse en la forma condensada como en el Teorema 2.2.3 [23].

$$A^\dagger = \hat{V} \hat{\Sigma}^{-1} \hat{U}^T \quad (2.9)$$

La ecuación (2.9) proporciona un método para calcular  $A^\dagger$  mediante el cálculo de la SVD de  $A$ . Debido a que rara vez existe alguna razón para calcular la pseudoinversa, es considerada básicamente una herramienta teórica. La pseudoinversa juega un papel muy similar al de la inversa ordinaria. La conexión entre la pseudoinversa y el problema de cuadrados mínimos está dada por el siguiente Teorema [21, 23].

**Teorema 2.3.1.1.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y  $b \in \mathbb{R}^n$ , y sea  $x \in \mathbb{R}^m$  la solución de norma mínima de

$$\|b - Ax\|_2 = \min_{w \in \mathbb{R}^m} \|b - Aw\|_2$$

Entonces  $x = A^\dagger b$ .

$$x = Vy = V \begin{bmatrix} \hat{y} \\ 0 \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}^{-1} \hat{c} \\ 0 \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c} \\ d \end{bmatrix}$$

$$x = V \Sigma^\dagger c = V \Sigma^\dagger U^T b = A^\dagger b$$

## 2.4. APLICACIONES BÁSICAS DE LOS VALORES SINGULARES [28]

En general, la descomposición en valores singulares encuentra su aplicación en los problemas relacionados con matrices grandes, las cuales pueden alcanzar dimensiones de varios miles. La existencia de algoritmos computacionales eficientes y precisos, hacen que el cálculo de la SVD sea muy útil en este tipo de estudios. La SVD es una herramienta importante en muchas tareas diferentes. Entre las más importantes se encuentran la optimización lineal de cuadrados mínimos y la compresión de datos con las aproximaciones de rango reducido. A continuación se mencionan algunas de estas aplicaciones.

### 2.4.1. RELACIÓN CON LA NORMA Y NÚMERO DE CONDICIÓN

La norma del vector Euclidiano para matrices rectangulares está dada por [21]:

$$\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

Geoméricamente  $\|A\|_2$  representa el aumento máximo que puede experimentar cualquier vector  $x \in \mathbb{R}^m$  cuando es accionado por  $A$ . Debido a esto se dice que  $\|A\|_2$  es igual al valor singular máximo de  $A$ .

**Teorema 2.4.1.1.** Dada  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  que tiene valores singulares  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq 0$ . Entonces  $\|A\|_2 = \sigma_1$  [21, 23, 30, 31].

Una forma de probar el Teorema 2.4.1.1 es mostrar que  $\max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sigma_1$ . El primer aviso que desde  $Av_1 = \sigma_1 u_1$ ,

$$\frac{\|Av_1\|_2}{\|v_1\|_2} = \sigma_1 \frac{\|u_1\|_2}{\|v_1\|_2} = \sigma_1$$

Así  $\max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \geq \sigma_1$ , mostrando que ningún otro vector está magnificado por encima de  $\sigma_1$ .

Dado  $x \in \mathbb{R}^m$ . Entonces  $x$  puede ser expresado como una combinación lineal de los vectores singulares derechos de  $A$  mediante  $x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_m v_m$ . Donde  $v_1 \dots v_m$  son ortonormales,  $\|x\|_2^2 = |c_1|^2 + \dots + |c_m|^2$ . Ahora  $Ax = c_1 Av_1 + \dots + c_r Av_r + \dots + c_m Av_m = \sigma_1 c_1 u_1 + \dots + \sigma_r c_r u_r + 0 + \dots + 0$ , donde  $r$  es el rango de  $A$ . Donde  $u_1 \dots u_m$  son también ortonormales,  $\|Ax\|_2^2 = |\sigma_1 c_1|^2 + \dots + |\sigma_r c_r|^2$ . Así  $\|Ax\|_2^2 \leq \sigma_1^2 (|c_1|^2 + \dots + |c_r|^2) \leq \sigma_1^2 \|x\|_2^2$ ; esto es,  $\|Ax\|_2 / \|x\|_2 \leq \sigma_1$  [23].

Debido a que  $A$  y  $A^T$  tienen los mismos valores singulares, se puede hacer mención al siguiente corolario.

**Corolario 2.4.1.2.**  $\|A\|_2 = \|A^T\|_2$  [2].

Ahora supongamos que  $A$  es cuadrada y no singular, diciendo  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . El número de condición espectral de  $A$  es definido por [21, 22, 31],

$$\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$$

Una forma de apreciar como  $\kappa_2(A)$  puede ser expresada en términos de los valores singulares de  $A$  es definiendo que:  $A$  tiene rango  $n$ , tiene  $n$  valores singulares estrictamente positivos, y esta acción puede describirse completamente por la siguiente figura [23]:

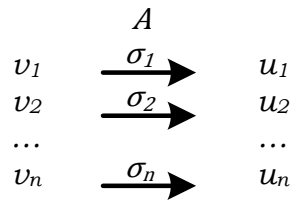


Fig. 2.6 Relación de los valores singulares de la matriz  $A$  [23].

De lo anterior se puede deducir que el diagrama para  $A^{-1}$  es

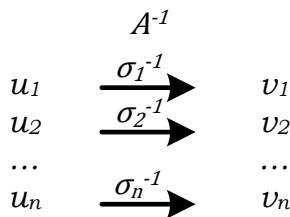


Fig. 2.7 Representación de los valores singulares de la matriz inversa  $A^{-1}$  [23].

En términos matriciales se tiene que  $A = U\Sigma V^T$  y  $A^{-1} = V^{-T}\Sigma^{-1}U^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$ . Entonces los valores singulares de  $A$ , en orden descendente, son  $\sigma_n^{-1} \geq \sigma_{n-1}^{-1} \geq \dots \geq$

$\sigma_1^{-1} > 0$ . Aplicando el Teorema 2.4.1.1 a  $A^{-1}$ , puede concluirse que  $\|A^{-1}\|_2 = \sigma_n^{-1} = 1/\sigma_n$  cuando  $A$  es  $n \times n$  y no singular [22]. De ésta observación se puede mencionar el siguiente teorema.

**Teorema 2.4.1.3.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz no singular con valores singulares  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$ . Entonces [22, 30, 31],

$$\kappa_2(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$$

Otra expresión para el número de condición es:

$$\kappa_2(A) = \frac{\text{maxmag}(A)}{\text{minmag}(A)},$$

donde

$$\text{maxmag}(A) = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2},$$

$$\text{minmag}(A) = \min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2},$$

A partir del Teorema 2.4.1.1 se conoce que  $\text{maxmag}(A) = \sigma_1$ . Por lo tanto puede confirmarse que  $\text{minmag}(A) = \sigma_n$ .

**Teorema 2.4.1.4.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , una matriz  $n \geq m$  distinta de cero con valores singulares  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m \geq 0$ , (aquí se obtienen algunos  $\sigma_i$  igual a cero si el  $\text{rango}(A) < m$ ). Entonces  $\text{maxmag}(A) = \sigma_1$ ,  $\text{minmag}(A) = \sigma_m$  y  $\kappa_2(A) = \sigma_1/\sigma_m$  [23].

La ecuación

$$\kappa_2(A) = \frac{\text{maxmag}(A)}{\text{minmag}(A)} \tag{2.10}$$

puede ser utilizada para ampliar la definición de  $\kappa_2$  para ciertas matrices rectangulares [23]. Una forma sencilla de apreciar esto es considerando una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $n \geq m$ , y  $\text{rango}(A) = m$ , entonces  $\text{minmag}(A) > 0$ , y puede tomarse la ecuación (2.10) como la definición del número de condición de  $A$ . Pero si  $A$  no tiene rango completo, entonces (aun suponiendo  $n > m$ )  $\text{minmag}(A) = 0$ , para lo cual es necesario definir  $\kappa_2(A) = \infty$ .

Con esta prueba el Teorema 2.4.1.4 se mantiene, independientemente de si  $A$  tiene o no rango completo.

Los siguientes dos teoremas establecen otros resultados importantes.

**Teorema 2.4.1.5.** Dada  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  con  $n \geq m$ . Entonces  $\|A^T A\|_2 = \|A\|_2^2$  y  $\kappa_2(A^T A) = \kappa_2(A)^2$  [22].

Es adecuado señalar que  $A^T A$  es la matriz de coeficientes de la ecuación normal

$$A^T A x = A^T b \quad (2.11)$$

la cual puede ser utilizada para resolver el problema de cuadrados mínimos.

Una vez aclarado este punto, se debe mencionar que el Teorema 2.4.1.5 muestra que la ecuación normal puede estar severamente mal condicionada, incluso si la matriz  $A$  solo esta levemente condicionada.

**Teorema 2.4.1.6.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $n \geq m$ ,  $\text{rango}(A) = m$ , con valores singulares  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m > 0$ . Entonces  $\|(A^T A)^{-1}\|_2 = \sigma_m^{-2}$ ,  $\|(A^T A)^{-1} A^T\|_2 = \sigma_m^{-1}$ ,  $\|A(A^T A)^{-1}\|_2 = \sigma_m^{-1}$ , y  $\|A(A^T A)^{-1} A^T\|_2 = 1$  [3].

Donde la matriz  $(A^T A)^{-1} A^T$  es conocida como la pseudoinversa de  $A$ , y la matriz  $A(A^T A)^{-1}$  es la pseudoinversa de  $A^T$ .

### 2.4.2. DETERMINACIÓN DE RANGO NUMÉRICO

Una de las aplicaciones más interesantes de la SVD es que nos permite calcular el rango de una matriz con bastante confiabilidad. De hecho, el Teorema SVD proporciona mucho más que eso, es capaz de brindar una medida de esa fiabilidad. Esto debido a que pudiesen llegar a existir matrices muy grandes o simplemente matrices con errores, que tuviesen valores singulares “muy grandes”, siendo los otros “muy pequeños” teniendo rango numérico  $k$ .

Por ejemplo, considerando la matriz  $A$

$$A = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 4/3 \\ 1/3 & 2/3 & 3/3 \\ 2/5 & 2/5 & 4/5 \\ 3/5 & 1/5 & 4/5 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Se observa que  $A$  es de rango 2, debido a que su tercera columna es la suma de las dos primeras. Si se utiliza un comando computacional de FORTRAN o MATLAB para determinar su rango, primero se tiene que almacenar la matriz en la computadora. Esta simple acción puede ocasionar errores de redondeo que destruyan la relación entre las columnas, perturbando los resultados arrojados por el programa. Utilizando doble precisión se obtiene:

$$\sigma_1 = 2.5987 \quad \sigma_2 = 0.3682 \quad \text{y} \quad \sigma_3 = 9.8864 \times 10^{-17}$$

Debido a que existen tres valores singulares distintos de cero, se tendría que concluir que la matriz  $A$  tiene rango 3. Sin embargo, no se debe pasar por alto que uno de los valores singulares es muy pequeño, tanto así, que debe considerarse como un cero.

Hablando de manera más general, una matriz que tiene  $k$  valores singulares “grandes”, siendo los otros “pequeños”, tiene rango numérico  $k$ . Es por esta razón que con el fin de

determinar que valores singulares son “pequeños”, es necesario introducir una tolerancia  $\epsilon$  que represente el nivel de incertidumbre en los datos de la matriz [21, 22, 23].

Los siguientes teoremas proporcionan una mejor idea acerca del uso de los valores singulares para definir el rango numérico de una matriz.

**Teorema 2.4.2.1.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  con  $\text{rango}(A) = r > 0$ . Sea  $A = U\Sigma V^T$  la SVD de  $A$ , con valores singulares  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ . Para  $k = 1, \dots, r - 1$ , definir  $A_k = U\Sigma_k V^T$ , donde  $\Sigma_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$  es la matriz diagonal  $\text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_k, 0, \dots, 0\}$ . Entonces  $\text{rango}(A_k) = k$ , y [22]:

$$\sigma_{k+1} = \|A - A_k\|_2 = \min\{\|A - B\|_2 \mid \text{rango}(B) \leq k\}.$$

Esto quiere decir que de todas las matrices de rango  $k$  o menor,  $A_k$  es el más cercano a  $A$ .

Una forma más clara de entender el teorema anterior es percibir que  $\text{rango}(A) = k$ . Donde  $A - A_k = U(\Sigma - \Sigma_k)V^T$ , está claro que el valor singular mayor de  $A - A_k$  es  $\sigma_{k+1}$ . Por lo tanto  $\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$  [23].

Para demostrar que para cualquier otra matriz  $B$  de rango  $k$  o menor,  $\|A - B\| \geq \sigma_{k+1}$  es bueno mencionar que dado cualquier  $B$ ,  $N(B)$  tiene dimensión al menos  $m - k$ , para  $\dim(N(B)) = m - \dim(\mathcal{R}(B)) = m - \text{rango}(B) \geq m - k$ . Además el espacio  $\text{span}\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$  tiene dimensión  $k + 1$ . Donde  $N(B)$  y  $\text{span}\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$  son dos subespacios de  $\mathbb{R}^m$ . Sea  $\hat{x}$  un vector no nulo en  $N(B) \cap \text{span}\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$ . Se puede asumir que  $\|\hat{x}\|_2 = 1$ . Donde  $\hat{x} \in \text{span}\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$ , existen escalares  $c_1, \dots, c_{k+1}$  tal que  $\hat{x} = c_1 v_1 + \dots + c_{k+1} v_{k+1}$ . Debido a que  $v_1, \dots, v_{k+1}$  es ortonormal,  $|c_1|^2 + \dots + |c_{k+1}|^2 = \|\hat{x}\|_2^2 = 1$ . Donde  $\hat{x} \in N(B)$ ,  $B\hat{x} = 0$ . Entonces [22, 23, 31],

$$(A - B)\hat{x} = A\hat{x} = \sum_{i=1}^{k+1} c_i A v_i = \sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i v_i u_i.$$

Donde  $u_1, \dots, u_{k+1}$  son también ortonormales,

$$\|(A - B)\hat{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{k+1} |\sigma_i c_i|^2 \geq \sigma_{k+1}^2 \sum_{i=1}^{k+1} |c_i|^2 = \sigma_{k+1}^2.$$

Por lo tanto

$$\|A - B\|_2 \geq \frac{\|(A - B)\hat{x}\|_2}{\|\hat{x}\|_2} \geq \sigma_{k+1}.$$

**Corolario 2.4.2.2.** Suponer que  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  tiene rango completo. Así  $\text{rango}(A) = r$ , donde  $r = \min\{n, m\}$ . Sean  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r$  los valores singulares de  $A$ . Dado  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  que satisface  $\|A - B\|_2 < \sigma_r$ . Entonces  $B$  también tiene rango completo [22].

Del corolario anterior se puede deducir que si  $A$  tiene rango completo, entonces todas las matrices lo suficientemente cerca de  $A$  también tienen rango completo.

El conjunto de matrices de rango completo es un subconjunto abierto y denso de  $\mathbb{R}^{n \times m}$ . Por lo tanto su complemento, el conjunto de matrices de rango deficiente es cerrado y denso. Es por eso que en cierto sentido todas las matrices tienen rango completo [21].

Si una matriz no tiene rango completo, cualquier pequeña perturbación es casi seguro que la transforme en una matriz con rango completo. Es por eso que muchas veces se dice que es imposible calcular el rango exacto de una matriz o incluso detectar que se trata de rango deficiente.

Por esta razón se introduce  $\epsilon$  como un número positivo que representa la magnitud de la incertidumbre en los datos de la matriz  $A$ . Si existen matrices  $B$  que cuentan con rango  $k$  tal que  $\|A - B\|_2 < \epsilon$  y, por otro lado, para cada matriz  $C$  de  $\text{rango} \leq k - 1$  se tiene  $\|A - C\|_2 \gg \epsilon$ , entonces tendría sentido decir que el rango numérico de  $A$  es  $k$  [21, 23].



Del Teorema 2.4.2.1, se sabe que esta condición se cumple si y solo si

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k \gg \epsilon \geq \sigma_{k+1} \geq \dots$$

La expresión anterior justifica el uso de los valores singulares para determinar el rango numérico de una matriz.

### 2.4.3. DESCOMPOSICIÓN ORTOGONAL [21, 24, 30, 31]

La descomposición  $QR$  con columna pivote da  $AE = QR$  o el equivalente  $A = QRE^T$ , donde  $E$  es una matriz de permutación, un tipo especial de matriz ortogonal. La SVD proporciona  $A = U\Sigma V^T$ . Ambas descomposiciones son ejemplos de descomposiciones ortogonales  $A = YTZ^T$ , donde  $Y$  y  $Z$  son ortogonales, y  $T$  tiene una forma simple. La descomposición  $QR$  es mas sencilla de calcular que la SVD. Sin embargo, la SVD siempre revela el rango numérico de la matriz, mientras que la descomposición  $QR$  en ocasiones no lo hace.

Debido a esta situación ha existido un interés considerable en la creación de una descomposición ortogonal que sea más sencilla de calcular y que aún así revele el rango de la matriz. Destacan las descomposiciones  $ULV$  y  $URV$ , que tienen la característica atractiva que pueden ser actualizadas a bajo costo computacional si  $A$  es modificada por una matriz de rango uno, como suele suceder en las aplicaciones de procesamiento de señales. En el presente trabajo no se abordaran dichas descomposiciones pero pueden consultarse en la bibliografía mencionada si se está interesado en el tema [21, 23].

### 2.4.4. DISTANCIA MAS CERCANA A LA MATRIZ SINGULAR

Como se menciona en el apartado 2.4.2 pueden existir ocasiones en las que la computadora nos proporcione una medida equivocada del rango de la matriz. Particularmente, para una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  no singular, el valor singular más pequeño  $\sigma_n$ , proporciona una medida de la distancia de  $A$  a la matriz singular más cercana.

Considerando el Teorema 2.4.2.1 para matrices cuadradas se puede considerar que, dada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  no singular, y donde  $A_s$  representa a la matriz singular que está más cerca de  $A$ , en el sentido de que  $\|A - A_s\|_2$  es lo más pequeño posible. Se tiene que [23],

$$\frac{\|A - A_s\|}{\|A\|} \geq \frac{1}{\kappa(A)}$$

para cualquier norma matricial inducida, mientras que para la norma-2 se debe cumplir la igualdad.

**Corolario 2.4.4.1.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  no singular, por lo que tiene valores singulares  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$ . Sea  $A_s$  la matriz singular que esta más cerca de  $A$ , en el sentido de que  $\|A - A_s\|_2$  es lo más pequeño posible. Entonces  $\|A - A_s\| = \sigma_n$  y [21],

$$\frac{\|A - A_s\|_2}{\|A\|_2} = \frac{1}{\kappa_2(A)}$$

Este resultado es consecuencia de los Teoremas 2.4.1.1, 2.4.1.3 y 2.4.2.1. En pocas palabras, la distancia de  $A$  a la matriz singular más cercana es igual al valor singular más pequeño de  $A$ , y la “distancia relativa” a la matriz singular más cercana es igual a la inversa del numero de condición.

## 2.4.5. OTRAS APLICACIONES

Además de las aplicaciones básicas mencionadas anteriormente, la SVD también encuentra su uso en: 1) la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con restricciones de igualdad, 2) la resolución de sistemas de ecuaciones lineales homogéneas, 3) el cálculo de la pseudoinversa de Moore-Penrose y otras inversas generalizadas, 4) la determinación de las dependencias o casi dependencias entre las columnas o filas de una matriz [28].

Otra aplicación que se le da a la SVD es como herramienta para el análisis teórico de algoritmos numéricos [29].

Cabe mencionar que la SVD desarrolla un papel importante en el análisis de matrices cuadradas no singulares, sin embargo todo el poder de su aplicación tiene lugar en el análisis de las matrices rectangulares, posiblemente en matrices con rango deficiente, que surgen más comúnmente en los problemas de cuadrados mínimos lineales.

## 2.5. SENSIBILIDAD DEL PROBLEMA DE CUADRADOS MÍNIMOS [21, 22, 24, 27]

A continuación se abordara un punto importante referente a la sensibilidad de la solución del problema de cuadrados mínimos bajo perturbaciones de  $A$  y  $b$ , considerando el caso de rango completo con  $n > m$ .

Dada  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y  $b \in \mathbb{R}^n$ , con  $n \geq m$  y  $\text{rango}(A) = m$ , existe una única  $x \in \mathbb{R}^m$  tal que [22],

$$\|b - Ax\|_2 = \min_{w \in \mathbb{R}^m} \|b - Aw\|_2$$

Si ahora se perturba ligeramente  $A$  y  $b$ , la solución  $x$  se vera alterada. El análisis de sensibilidad se puede combinar con el análisis de error hacia atrás para proporcionar una evaluación de la precisión de varios métodos para resolver problemas de cuadrados mínimos.

La solución del problema de cuadrados mínimos se puede pensar como un proceso de dos etapas. En primer lugar se encuentra que  $y \in \mathcal{R}(A)$  cuya distancia a  $b$  es mínima [23]:

$$\|b - y\|_2 = \min_{s \in \mathcal{R}(A)} \|b - s\|_2$$

Entonces la solución de cuadrados mínimos  $x \in \mathbb{R}^m$  se encuentra resolviendo la ecuación  $Ax = y$  exactamente. Debido a que  $A$  tiene rango completo, la solución es única. A pesar de que  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y  $y \in \mathbb{R}^n$ , la ecuación matricial  $Ax = y$  es un sistema de  $m$  ecuaciones con  $m$  incógnitas, donde  $y$  se encuentra en el subespacio  $\mathcal{R}(A)$  de dimensión  $m$ ,

y  $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{R}(A)$  puede ser visto como una proyección de un espacio de dimensión  $m$  en otro.

Sea  $r = b - y = b - Ax$ . Este es el residuo del problema de cuadrados mínimos, donde  $r$  es ortogonal a  $\mathcal{R}(A)$  [23]. Particularmente  $b$ ,  $y$  y  $r$  forman un triángulo rectángulo como se muestra en la figura 2.8.

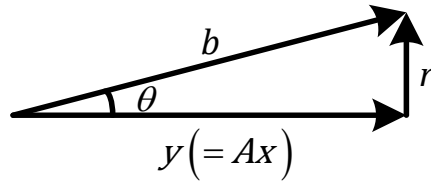


Fig. 2.8 Triángulo rectángulo formado por  $b$ ,  $y$  y  $r$ .

El ángulo  $\theta$  entre  $b$  y  $y$  es el ángulo más pequeño entre  $b$  y un elemento de  $\mathcal{R}(A)$ . Lo que deja en claro que

$$\|r\|_2 = \|b\|_2 \sin \theta \quad (2.13)$$

$$\|y\|_2 = \|b\|_2 \cos \theta \quad (2.14)$$

Este par de ecuaciones y la figura 2.8 son de mucha utilidad en el análisis de sensibilidad.

### 2.5.1. EL EFECTO DE LAS PERTURBACIONES DE $b$ [21, 23]

Dada una perturbación  $\delta b$ , sea  $y + \delta y$  denota el elemento de  $\mathcal{R}(A)$  que está más cercano a  $b + \delta b$ , y sea  $\hat{x} = x + \delta x$  la solución exacta de  $A\hat{x} = y + \delta y$ . Entonces  $\hat{x}$  es el minimizador de  $\|(b + \delta b) - A\hat{x}\|_2$ . Se puede decir que si  $\|\delta b\|_2/\|b\|_2$  es pequeño, entonces  $\|\delta x\|_2/\|x\|_2$  también es pequeño, pero existen dos razones por la que este caso podría no cumplirse. La primera es que  $\|\delta y\|_2/\|y\|_2$  podría no ser pequeña. Esto se puede apreciar en la figura 2.8 y considerar que ocurre cuando  $b$  es ortogonal o casi ortogonal a  $\mathcal{R}(A)$ . Entonces  $y$  es cero o muy pequeña. Es evidente que una pequeña perturbación de  $b$

en una dirección paralela a  $\mathcal{R}(A)$  provocara una perturbación  $\delta y$  que es grande en relación con  $\|y\|_2$ . El segundo problema es que incluso si  $\|\delta y\|_2/\|y\|_2$  es pequeña,  $\|\delta x\|_2/\|x\|_2$  puede ser grande si el sistema lineal  $Ax = y$  esta mal condicionado.

$$\frac{\|\delta y\|_2}{\|y\|_2} \leq \frac{1}{\cos \theta} \frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2} \quad (2.15)$$

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq \kappa_2(A) \frac{\|\delta y\|_2}{\|y\|_2} \quad (2.16)$$

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq \frac{\kappa_2(A)}{\cos \theta} \frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2} \quad (2.17)$$

La desigualdad (2.15) muestra que si  $\theta$  no esta cerca de  $\pi/2$ , es decir, si  $b$  no es casi ortogonal al rango de  $A$ , una pequeña perturbación en  $b$  resulta en una pequeña perturbación en  $y$ . Sin embargo, esto casi nunca sucede en los problemas reales; de hecho el ángulo  $\theta$ , así como  $\|r\|_2$ , son medidas que reflejan que tan bien ajusta los datos la solución de cuadrados mínimos.

En la desigualdad (2.17) se puede observar que si  $\kappa_2(A)$  no es grande, y  $\cos \theta$  no es cercano a cero, entonces una pequeña perturbación en  $b$  resulta en una pequeña perturbación en  $x$ .

Como se mencionó anteriormente, la solución del problema de cuadrados mínimos satisface las ecuaciones normales (2.11). Por lo tanto, también la solución del problema perturbado satisface las ecuaciones normales perturbadas

$$A^T A(x + \delta x) = A^T (b + \delta b) \quad (2.18)$$

Restando (2.11) de (2.18),

$$\delta x = (A^T A)^{-1} A^T \delta b$$

Así  $\|\delta x\|_2 \leq \|(A^T A)^{-1} A^T\|_2 \|\delta b\|_2$ . Del Teorema 2.4.1.6,  $\|(A^T A)^{-1} A^T\|_2 = \sigma_m^{-1}$  donde  $\sigma_m$  es el valor singular más pequeño de  $A$ , entonces

$$\|\delta x\|_2 \leq \sigma_m^{-1} \|\delta b\|_2 \quad (2.19)$$

Por otro lado, puede observarse de (2.14) que  $\|b\|_2 \cos \theta = \|y\|_2 = \|Ax\|_2 \leq \|A\|_2 \|x\|_2 = \sigma_1 \|x\|_2$ . Así

$$\frac{1}{\|x\|_2} \leq \frac{\sigma_1}{\cos \theta} \frac{1}{\|b\|_2} \quad (2.20)$$

Multiplicando (2.19) por (2.20), y recordando que  $\kappa_2(A) = \sigma_1/\sigma_m$  (Teorema 2.4.1.3), se obtiene (2.17).

### 2.5.2. EL EFECTO DE LAS PERTURBACIONES DE $A$ [22, 23]

Desafortunadamente las perturbaciones en  $A$  tienen un efecto más severo que las perturbaciones de  $b$ . Como se menciona en el siguiente Teorema, la sensibilidad de  $x$  a las perturbaciones de  $A$  dependen, en parte, del cuadrado del número de condición de  $A$ .

**Teorema 2.5.2.1.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq m$  y  $\text{rango}(A) = m$ . Sea  $x \in \mathbb{R}^m$  la única solución de

$$\|b - Ax\| = \min_{w \in \mathbb{R}^m} \|b - Aw\|_2$$

Sea  $\theta$  el ángulo entre  $b$  y  $Ax$ , y asumir que  $\theta \neq \pi/2$ . Sea  $\delta A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\delta b \in \mathbb{R}^n$ ,  $\epsilon_A = \|\delta A\|_2/\|A\|_2$ ,  $\epsilon_b = \|\delta b\|_2/\|b\|_2$ , y  $\epsilon = \max\{\epsilon_A, \epsilon_b\}$ . Asumir  $\epsilon \ll 1$ , y en particular  $\epsilon_A < 1/\kappa_2(A)$ . Sea  $\hat{x} = x + \delta x \in \mathbb{R}^m$  la única solución de

$$\|(b + \delta b) - (A + \delta A)\hat{x}\| = \min_{w \in \mathbb{R}^m} \|(b + \delta b) - (A + \delta A)w\|_2$$

Entonces

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq \frac{2\kappa_2(A)}{\cos \theta} \epsilon_b + 2(\kappa_2(A)^2 \tan \theta + \kappa_2(A))\epsilon_A + O(\epsilon^2) \quad (2.21)$$

Sea  $r = b - Ax$  y  $\hat{r} = r + \delta r = (b + \delta b) - (A + \delta A)\hat{x}$ . Entonces

$$\frac{\|\delta r\|_2}{\|b\|_2} \leq 2\epsilon_b + 3\kappa_2(A)\epsilon_A + O(\epsilon^2) \quad (2.22)$$

En ambos límites el término  $O(\epsilon^2)$  representa términos que contienen factores  $\epsilon_A^2$  o  $\epsilon_A\epsilon_b$ , los cuales son despreciables. La característica más notable de (2.21) es que depende del cuadrado de  $\kappa_2(A)$ . Esto no es extraño si se considera que una perturbación en  $A$  provoca una perturbación en  $\mathcal{R}(A)$  que resulta ser proporcional a  $\kappa_2(A)$ . Así, una perturbación  $\epsilon_A$  puede causar un cambio de magnitud  $\kappa_2(A)\epsilon_A$  en  $y = (Ax \in \mathcal{R}(A))$ , que a su vez puede causar un cambio de magnitud  $\kappa_2(A)^2\epsilon$  en  $x$ .

La presencia de  $\kappa_2(A)^2$  en (2.21) quiere decir que incluso si  $A$  está mal condicionada levemente, una pequeña perturbación en  $A$  puede causar un gran cambio en  $x$ . Se debe mencionar que si bien un ajuste perfecto es inusual, un buen ajuste no lo es. Si el ajuste es bueno,  $\tan \theta$  será pequeña y prácticamente se cancelará el factor  $\kappa_2(A)^2$ .

Se observa que (2.22) depende de  $\kappa_2(A)$ , y no de  $\kappa_2(A)^2$ . Esto significa que el residuo y la bondad de ajuste, son generalmente mucho menos sensibles a las perturbaciones que la solución de cuadrados mínimos.

## 2.6. CONDICIONAMIENTO DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES [68, 69]

Se considera la solución numérica de un sistema de ecuaciones algebraicas lineales, escrito de la forma:

$$Ax = b$$

donde  $A$  es una matriz no singular de dimensión  $n \times n$ ,  $b$  es el vector de longitud  $n$ , y  $x$  es el vector desconocido.

En la práctica, los elementos de  $A$  y  $b$  generalmente no son conocidos con exactitud, pero incluso si son conocidos y se introducen a la computadora, existen errores de redondeo durante la solución. El efecto de redondeo a su vez puede ser expresado por las perturbaciones equivalentes en los datos originales. Es por ello la importancia de conocer la sensibilidad de  $x$  ante las perturbaciones en  $A$  y  $b$ , expuestas en el apartado 2.5.

Si se asume que la matriz  $A$  se conoce con exactitud y el vector  $b$  tiene cierta incertidumbre  $\Delta b$ , se tendrá una incertidumbre  $\Delta x$  en la solución. Por lo tanto,

$$A(x + \Delta x) = b + \Delta b$$

de manera que

$$\Delta x = A^{-1}\Delta b$$

De este modo

$$\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\|\|\Delta b\| \tag{2.23}$$

donde  $\|\cdot\|$  se refiere a cualquier norma vectorial y a la norma de la matriz consistente. De  $b = Ax$  se tiene que,

$$\|b\| \leq \|A\|\|x\| \tag{2.24}$$

La multiplicación de (2.23) y (2.24) resulta,

$$\|\Delta x\|\|b\| \leq \|A\|\|A^{-1}\|\|x\|\|\Delta b\| \tag{2.25}$$



Suponiendo a  $b \neq 0$ , a partir de (2.25) se encuentra que

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \quad (2.26)$$

Para cualquier matriz  $A$  no singular, el producto  $\|A\| \|A^{-1}\|$  se conoce como el *número de condición* de  $A$ ,  $\kappa(A)$ . De la propiedad de las normas de matrices,

$$\|AA^{-1}\| \leq \|A\| \|A^{-1}\|$$

resulta que,

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \geq 1$$

El valor del número de condición depende de la norma subyacente. Frecuentemente la norma-1 es utilizada ya que se calcula fácilmente. También puede emplearse la notación  $\kappa_p(A) = \|A\|_p \|A^{-1}\|_p$  para la norma- $p$  correspondiente.

Si  $V$  es una matriz ortogonal y  $B = VA$ , entonces,

$$\|B\|_2 \|B^{-1}\|_2 = \|VA\|_2 \|A^{-1}V^T\|_2 = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$$

Esta igualdad muestra que si es utilizada la norma-2, el número de condición es invariante con respecto a las transformaciones ortogonales equivalentes. Además, este número de condición es igual a 1 si  $A$  es un múltiplo de una matriz ortogonal.

De (2.26) se obtiene que,

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

La desigualdad anterior revela que el número de condición limita la relación del error relativo en la solución, al error relativo en el vector  $b$  del lado derecho. Es decir, el error relativo de la norma de la solución calculada puede ser tan grande como el error relativo de la norma de los coeficientes de  $b$ , multiplicado por el número de condición [71].

Si  $\kappa(A) = 1$  entonces el error relativo en  $x$  es idéntico al error relativo en  $b$ . Sin embargo, si  $\kappa(A) = 10^6$ , entonces  $\|\Delta x\|/\|x\|$  puede ser  $10^6$  veces  $\|\Delta b\|/\|b\|$ . Si  $\kappa(A)$  es pequeño, entonces la matriz  $A$  se dice que está bien condicionada (con respecto al problema de solución de ecuaciones lineales). Si  $\kappa(A)$  es grande, entonces la matriz  $A$  está mal condicionada [68, 71]. El número de condición es igual a uno para la matriz identidad y tiende a infinito para matrices cuasi-singulares.

## CAPÍTULO III –

# ESTIMACIÓN DE ESTADO EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

## CAPÍTULO 3. ESTIMACIÓN DE ESTADO EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

En el algoritmo de estimación de estado realizado para este trabajo de tesis se asume que el sistema de potencia está operando en estado estacionario y en condiciones equilibradas. Estos supuestos permiten utilizar un circuito equivalente de una sola fase para modelar el sistema. La presente sección muestra una introducción del modelo matemático y del proceso de un estudio de estimación, también se describe la importancia de la matriz  $Y_{bus}$  en la estimación de estado. Posteriormente se detalla la manera en que están formados el Jacobiano de mediciones  $H$  y las demás matrices utilizadas en el proceso, y por último se presenta el diagrama de flujo del programa elaborado.

### 3.1. MODELO MATEMÁTICO

El algoritmo de estimación de estado se refiere al procedimiento para obtener el fasor de voltaje complejo de todos los nodos del sistema en un instante de tiempo determinado. La aproximación es vulnerable a errores que ocurran durante la medición.

A partir del siguiente modelo matemático no lineal de cada medición [4, 5]:

$$z = h(x) + \varepsilon \quad (3.1)$$

Donde:

- $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado del sistema (magnitud y ángulo de todos los voltajes de la red).
- $h(x)$  es una función no lineal de  $x$  determinada por  $Y$  (admitancia) y las Leyes de Kirchhoff (mediciones ideales).
- $\varepsilon$  es el vector que representa la incertidumbre en las mediciones.
- $z \in \mathbb{R}^m$  es el vector de mediciones.

Se considera que los sistemas tienen vectores de  $n$  variables, con funciones no lineales  $h(x)$  de  $x$  y con valor conocido de  $z$ . El vector de estimación de estado  $\hat{x}$  se define como el valor de  $x$  que minimiza a  $J(x)$  y se expresa como [14],

$$J(x) = [z - h(x)]^T R^{-1} [z - h(x)] \quad (3.2)$$

En donde:

- $R^{-1}$  es la matriz de pesos, también expresada por la letra  $W$ . Es decir, la matriz inversa de las varianzas de los errores en las mediciones.
- $J(x)$  es una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad puede ser calculada.

La minimización de  $J(x)$  con respecto a  $x$  se efectúa mediante una aproximación estándar, debido a que se trata de una función no lineal. Suponiendo a  $x_0$  un valor inicial de  $x$ , la expansión por series de Taylor es [11]:

$$h(x) = h(x_0) + H(x_0)[\Delta x] + \dots \quad (3.3)$$

donde  $H(x_0)$  es la matriz Jacobiana cuyos elementos están dados por,

$$\left. \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right|_{x=x_0} \quad (3.4)$$

Y la expresión  $\Delta x = x - x_0$ . Si los términos de mayor orden de la ecuación (3.3) son despreciados, sustituyendo (3.3) en (3.2) se tiene,

$$J(x) = [\Delta z - H(x_0)\Delta x]^T R^{-1} [\Delta z - H(x_0)\Delta x] \quad (3.5)$$

donde  $\Delta z = z - h(x_0)$ . La ecuación (3.5) puede ser escrita en la forma:

$$J(x) = \Delta z^T [R^{-1} - R^{-1}H(x_0)\Sigma(x_0)H^T(x_0)R^{-1}]\Delta z + [\Delta x - \Sigma(x_0)H^T(x_0)R^{-1}\Delta z]^T \Sigma^{-1}(x_0)[\Delta x - \Sigma(x_0)H^T(x_0)R^{-1}\Delta z] \quad (3.6)$$

Donde  $\Sigma(x_0) = [H^T(x_0)R^{-1}H(x_0)]^{-1}$  y la  $\Sigma(x_0)$  se asume que existe. Si  $\Delta\hat{x}$  es el valor de  $\Delta x$  que minimiza a  $J(x)$  de la ecuación (3.6), entonces de (3.6) se tiene

$$\Delta\hat{x} = \Sigma(x_0)H^T(x_0)R^{-1}\Delta z \quad (3.7)$$

$$\hat{x} = x_0 + \Sigma(x_0)H^T(x_0)R^{-1}[z - h(x_0)] \quad (3.8)$$

La fórmula (3.8) es empleada para un conjunto  $x_k$ , con  $k = 1, 2, 3, \text{etc.}$ , quedando la siguiente expresión:

$$x_{k+1} = x_k + \Sigma(x_k)H^T(x_k)R^{-1}[z - h(x_k)] \quad (3.9)$$

El algoritmo converge hasta que  $|J(x_k) - J(x_{k+1})|$ , o hasta que las magnitudes de todos los componentes  $x_{k+1} - x_k$  son menores a un valor determinado.

La estimación de estado  $\hat{x}$  se conoce como el valor de  $x$  que minimiza  $J(x)$  de la ecuación (3.2). Esta función objetivo puede reescribirse como [4, 5],

$$J(x) = \sum_{i=1}^m \frac{[z_i - h_i(x)]^2}{\sigma_i^2} \quad (3.10)$$

Al minimizar, debe cumplirse la condición de optimalidad de primer orden, que en este caso es,

$$\frac{\partial J(x)}{\partial x} = 0 \Rightarrow H^T(x)W[z - h(x)] = 0 \quad (3.11)$$

Como se trata de encontrar el valor de  $\hat{x}$  que satisface la ecuación no lineal (3.11), la forma más eficaz de hacerlo es mediante el método iterativo de Newton-Raphson. Despreciando los términos donde aparecen segundas derivadas de  $h(x)$ , el sistema lineal de  $n$  ecuaciones que debe resolverse en cada iteración es [14]:

$$G(x_k)\Delta x_k = H^T(x_k)W[z - h(x_k)] \quad (3.12)$$

en donde  $x_k$  representa el valor de  $x$  en la iteración  $k$ -ésima y  $G$  es conocida como matriz de ganancia, la cual está dada por,

$$G(x) = H^T(x)WH(x) \quad (3.13)$$

Una vez resuelto el sistema, el vector de estado debe actualizarse para el cálculo de la siguiente iteración:

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$$

### 3.2. MEDICIONES EN TIEMPO REAL

Considerando que todas las mediciones recabadas del sistema tendrán un error por mínimo que este sea, el vector de error  $\varepsilon_{medido}$  está modelado por la siguiente expresión:

$$z_{medida} = z_{ideal} + \varepsilon_{medido} \quad (3.14)$$

Donde el vector  $\varepsilon_{medido}$  representa los errores de medición, comunicación o simplemente de conversión analógico a digital, y se modela como un vector aleatorio con media cero, cuyo valor esperado está representado por  $E\{\varepsilon_{medido} \cdot \varepsilon_{medido}^T\} = R^{-1}_{medida}$  y  $R^{-1}_{medida}$  es una matriz simétrica, definida positiva y conocida como matriz de covarianzas [11].

Las mediciones en tiempo real son modeladas por,

$$z_i = h_i(x_{verdadera}) + \varepsilon_i \quad (3.15)$$

En donde  $h_i(x_{verdadera})$  es una función no lineal del valor real de una variable en un punto específico.

Dicha función no lineal es calculada a partir del modelo de la red, considerando la matriz de admitancias  $Y$  y las Leyes de Kirchhoff.

El modelo del error va de la mano con su detección e identificación. La detección consiste en determinar la existencia de errores en la red, en tanto que la identificación se encarga de determinar el tipo de error y la localización de este.

### **3.3. DETECCIÓN E IDENTIFICACIÓN DE DATOS ERRÓNEOS**

Una función esencial de un estimador de estado es la de detectar errores en las mediciones, así como identificarlos y eliminarlos si es posible. En todas las mediciones generalmente existen errores aleatorios, los cuales se deben principalmente a la poca precisión de los medidores así como al sistema de telecomunicación. El tratamiento de los datos erróneos depende del método de estimación de estado empleado. Cuando se utiliza el estimador de estado por cuadrados mínimos ponderados (WLS), la detección e identificación de errores se efectúa después del proceso de estimación, mediante el procesamiento de los residuos de las medidas. Este análisis se centra principalmente en las propiedades de estos residuos, incluyendo su distribución de probabilidad esperada [2, 5, 12, 13].

#### **3.3.1. CLASIFICACIÓN DE LAS MEDICIONES**

La detección e identificación de errores en los sistemas de potencia se basa en la redundancia del conjunto de mediciones. Estas mediciones cuentan con diferentes propiedades y afectan los resultados de la estimación de estado tanto por sus valores como por su ubicación, y pueden pertenecer a uno de los conjuntos siguientes [12, 14]:

- *Medidas Críticas:* Una medida pertenece a este conjunto si su eliminación resulta en un sistema no observable.
- *Medidas Redundantes:* Son aquellas que no son medidas críticas. Solo las mediciones redundantes pueden tener mediciones residuales cero.



### 3.3.2. DETECCIÓN DE DATOS ERRÓNEOS

Los resultados obtenidos del estimador son empleados para detectar errores en la red. Dos de los métodos más comúnmente utilizados son la prueba de la Chi-cuadrada y la prueba del mayor residuo normalizado, empleado este último también en la identificación del dato erróneo.

#### 3.3.2.1. PRUEBA $\chi^2$ PARA DETECCIÓN DE MEDIDAS ERRÓNEAS

La suma de cuadrados de variables aleatorias independientes con distribución normal resulta en una distribución Chi-cuadrada. La función objetivo  $J(x)$  de un estimador de estado WLS puede emplearse para aproximar por encima de la función  $f(x)$  una prueba de detección de datos erróneos, la cual está basada en las propiedades de la distribución  $\chi^2$  [4, 5, 14].

Los pasos para realizar la prueba Chi-cuadrada  $\chi^2$  son los siguientes:

- Resolver el estimador WLS y calcular la función objetivo

$$J(\hat{x}) = \sum_{i=1}^m \frac{(z_i - h_i(\hat{x}))^2}{\sigma_i^2} \quad (3.16)$$

Dónde:

$\hat{x}$ : Vector de estado estimado de dimensión  $n$ .

$h_i(\hat{x})$ : Medición estimada  $i$ .

$z_i$ : Valor medido de la medición  $i$ .

$\sigma_i^2$ : Varianza del error en la medición  $i$ .

$m$ : Numero de mediciones.

- Localizar en la tabla de distribución  $\chi^2$  para  $(m - n)$  grados de libertad el valor correspondiente a la probabilidad  $p$ . Sea  $\chi_{(m-n),p}^2$  este valor.
- Comprobar  $J(\hat{x}) \geq \chi_{(m-n),p}^2$ . Si la respuesta es afirmativa, se sospecha la existencia de datos erróneos.

Una vez confirmada la presencia de medidas con error, se procede a su identificación y posterior eliminación.

### 3.3.3. IDENTIFICACIÓN DE DATOS ERRÓNEOS

Una vez detectados los datos erróneos en el conjunto de mediciones, la identificación puede lograrse mediante otro tipo de manejo de los resultados del estimador. Un enfoque básico para la identificación de datos erróneos consiste en el empleo de técnicas lógicas de búsquedas basadas en residuos  $r^N$  [5, 12, 15].

#### 3.3.3.1. PRUEBA DEL MAYOR RESIDUO NORMALIZADO ( $r_{max}^N$ )

Al igual que las mediciones, los residuos de estas tienen una distribución normal. Por lo tanto se considera que los residuos normalizados  $r_i^N$  son  $N(0,1)$ . Las propiedades de los residuos normalizados para un solo dato erróneo existente en el conjunto de mediciones, se puede utilizar para diseñar una prueba que permita la identificación y eliminación de los datos erróneos.

Los pasos de dicha prueba son los siguientes [14]:

- Resolver el estimador WLS y obtener los elementos del vector de mediciones residuales:

$$r_i = z_i - h_i(\hat{x}), \quad i = 1, \dots, m \quad (3.17)$$

- Calcular los residuos normalizados:

$$r_i^N = \frac{|r_i|}{\sqrt{\Omega_{ii}}} \quad i = 1, \dots, m$$

- Encontrar el mayor residuo normalizado  $r_k^N$
- Si  $r_k^N > c$ , la medida  $k$  –ésima se considera errónea. De lo contrario, parar debido a que no existen medidas erróneas. La constante  $c$  es un umbral de identificación.
- Eliminar la medida sospechosa de los datos de entrada y regresar al inicio.

La identificación de un dato erróneo en particular puede llegar a resultar no ser tan fácil como parece. Esto se debe a que en aplicaciones prácticas de sistemas de potencia, el número de grados de libertad es grande, lo que ocasiona descartar a todo un grupo de mediciones que correspondan a los residuales más grandes, sin que exista una garantía de que éstos representen mediciones erróneas.

### 3.4. ANÁLISIS DE OBSERVABILIDAD

El propósito principal de este análisis es conocer si puede estimarse el estado de todo el sistema con base en las mediciones que se tienen disponibles. Si se dispone de suficientes mediciones para llevar a cabo la estimación de estado, se considera que la red es observable. En caso de que una red resulte ser no observable, es de mucha utilidad conocer qué zona tiene un estado que se pueda estimar, estas zonas son conocidas como *islas observables* [5]. Las islas observables están conectadas unas con otras a través de ramas no observables, cuyos flujos de potencia no pueden estimarse con las medidas disponibles.

El análisis de observabilidad puede describirse considerando el siguiente modelo de mediciones linealizado [15]:

$$\Delta z = H\Delta x + \varepsilon \quad (3.18)$$

En donde la estimación  $\Delta \hat{x}$  está dada por:

$$\Delta \hat{x} = (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} \Delta z$$

Se puede calcular una solución única para  $\Delta x$  si el producto  $(H^T R^{-1} H)$  es no singular o, si el Jacobiano de mediciones  $H$  es de rango completo, es decir,  $\text{rango}(H) = n$ .

Otro punto importante en este análisis es la determinación del número de pseudomediciones requeridas en aquellos casos en los que la red se declare no observable

con las mediciones existentes. La cantidad y ubicación de esta información adicional debe ser la menor posible con la finalidad de no afectar a las medidas reales.

Existen diferentes metodologías para el estudio de observabilidad de un sistema de potencia, algunas de ellas se mencionan en el Apéndice A y se clasifican en [5]:

- Topológicas
- Numéricas
- Híbridas

### 3.5. MODELADO DE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN [32]

Es conveniente representar una línea de transmisión mediante un modelo  $\pi$  de dos terminales, cuyos parámetros corresponden al circuito equivalente de secuencia positiva. En la figura 3.1 se representa el circuito equivalente de una línea de transmisión con una impedancia en serie  $R + jX$  y una susceptancia total de  $j2B$  [4].

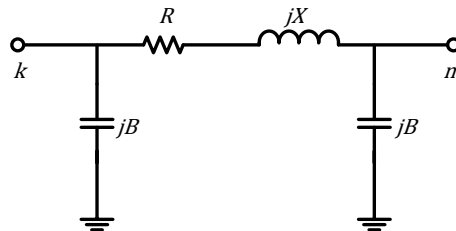


Fig. 3.1 Circuito equivalente para una línea de transmisión.

La figura 3.2 muestra una red de dos puertos, donde  $V_S$  e  $I_S$  representan la tensión y la corriente en el extremo de envío, y  $V_R$  e  $I_R$  son la tensión y corriente en el extremo receptor.

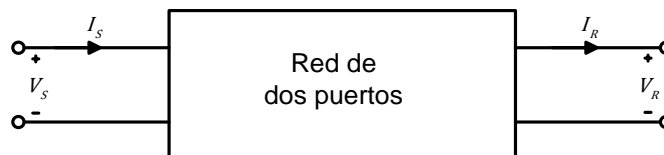


Fig. 3.2 Representación de una red de dos puertos [32].

La relación que existe entre las cantidades en el extremo de envío y el receptor se pueden representar mediante las siguientes expresiones

$$V_S = AV_R + BI_R \quad (3.19)$$

$$I_S = CV_R + DI_R \quad (3.20)$$

O bien, de manera matricial,

$$\begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

En donde  $A, B, C$  y  $D$  son parámetros que dependen de las constantes  $R, L, C$  y  $G$  de la línea de transmisión y son números complejos.  $A$  y  $D$  no tienen dimensiones, la unidad de  $B$  son los ohms y  $C$  en siemens.

### 3.5.1. LÍNEAS DE TRANSMISIÓN CORTAS Y MEDIANAS

La figura 3.3 representa una línea de transmisión corta, aplicada a líneas de 60 Hz menores a los 80 km de largo. En su circuito equivalente se observa que solo se incluye la resistencia y reactancia en serie, y que la admitancia en derivación es despreciada. Se aplica a líneas monofásicas o trifásicas completamente transpuestas que operen en condiciones balanceadas. Para una línea trifásica transpuesta,  $Z$  es la impedancia en serie,  $V_S$  y  $V_R$  son los voltajes línea a neutro,  $I_S$  e  $I_R$  son las corrientes de línea en secuencia positiva.

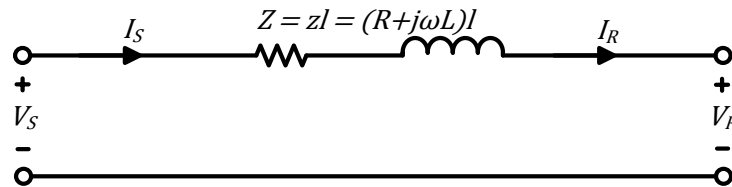


Fig. 3.3 Línea corta de transmisión [32].

En donde se tiene la siguiente notación:

$$z = R + j\omega L \text{ } (\Omega/\text{m}), \text{ impedancia en serie por unidad de longitud}$$

$y = G + j\omega C$  (S/m), admitancia en derivación por unidad de longitud

$Z = zl$  ( $\Omega$ ), impedancia total en serie

$Y = yl$  (S), admitancia total en derivación

$l$  (m), longitud de línea

Los parámetros  $ABCD$  para la línea de la figura 3.3 se obtienen a partir de las ecuaciones de LKV y LKC:

$$V_S = V_R + ZI_R \quad (3.22)$$

$$I_S = I_R \quad (3.23)$$

O en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Quedando los siguientes parámetros  $ABCD$  para la línea corta

$$A = D = 1 \text{ por unidad} \quad (3.25)$$

$$B = Z \Omega \quad (3.26)$$

$$C = 0 \text{ S} \quad (3.27)$$

En las líneas de longitud media, que van de 80 a 250 km, se suele concentrar la capacitancia total en derivación y ubicar la mitad en cada extremo de la línea. La figura 3.4 muestra el circuito  $\pi$  nominal para una línea de este tipo.

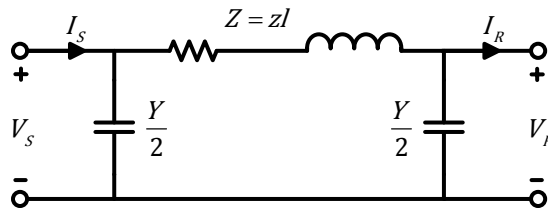


Fig. 3.4 Circuito  $\pi$  nominal de una línea de transmisión mediana [32].

La corriente en la rama en serie de la figura 3.4 es igual a  $I_R = \frac{V_R Y}{2}$ . Escribiendo un par de ecuaciones de la LKV se tiene,

$$V_S = V_R + Z \left( I_R + \frac{V_R Y}{2} \right) = \left( 1 + \frac{YZ}{2} \right) V_R + Z I_R \quad (3.28)$$

$$I_S = I_R + \frac{V_R Y}{2} + \frac{V_S Y}{2} \quad (3.29)$$

Sustituyendo la ecuación (3.28) en la (3.29),

$$I_S = I_R + \frac{V_R Y}{2} + \left[ \left( 1 + \frac{YZ}{2} \right) V_R + Z I_R \right] \frac{Y}{2} = Y \left( 1 + \frac{YZ}{4} \right) V_R + \left( 1 + \frac{YZ}{2} \right) I_R \quad (3.30)$$

Escribiendo las ecuaciones (3.28) y (3.30) en forma matricial se tiene,

$$\begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( 1 + \frac{YZ}{2} \right) & Z \\ Y \left( 1 + \frac{YZ}{4} \right) & \left( 1 + \frac{YZ}{2} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Al comparar las ecuaciones (3.30) y (3.31) se obtienen los siguientes parámetros

$$A = D = 1 + \frac{YZ}{2} \text{ por unidad} \quad (3.32)$$

$$B = Z \Omega \quad (3.33)$$

$$C = Y \left( 1 + \frac{YZ}{4} \right) \text{ S} \quad (3.34)$$

### 3.6. MODELADO DE LA RED DE ADMITANCIA [15]

Una red típica de transmisión cubre una gran área geográfica e incluye un gran número y variedad de componentes. En el análisis de grandes sistemas de potencia, el modelo de la red se representa a través de una matriz de la red, cuyos elementos son determinados por los parámetros del sistema.

Existen dos opciones de representar esta matriz partiendo de la corriente que fluye a través de un componente de la red y que se relaciona con la caída de voltaje a través de él mediante un parámetro de impedancia o admitancia. La matriz de admitancias de nodo proporciona el comportamiento en estado estable de todos los componentes que actúan juntos para conformar el sistema y está basada en el análisis nodal de las ecuaciones de red.

En estado estable, un generador puede ser representado por el circuito de la figura 3.5 (a). El circuito tiene una fem constante  $E_S$ , una impedancia serie  $Z_a$  y un voltaje en terminales  $V$ , su ecuación es

$$E_S = IZ_a + V \quad (3.35)$$

La ecuación de corriente para la figura 3.5 (b) está dada por la siguiente expresión, en donde  $Y_a = 1/Z_a$  representa la admitancia.

$$I_S = \frac{E_S}{Z_a} = I + VY_a \quad (3.36)$$

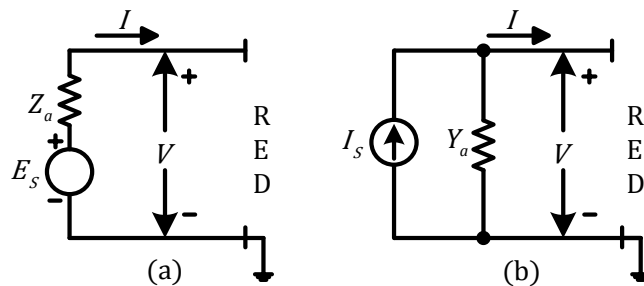


Fig. 3.5 Circuitos que ilustran la equivalencia de fuentes [15].

La impedancia de rama  $Z_a$  se conoce normalmente como impedancia elemental, de la misma manera a  $Y_a$  se le llama admitancia elemental. Las ecuaciones que caracterizan la rama son

$$V_a = Z_a I_a \quad \text{o} \quad Y_a V_a = I_a \quad (3.37)$$



donde  $Y_a$  es el recíproco de  $Z_a$  y  $V_a$  representa la caída de voltaje a través de la rama en la dirección de la corriente de rama  $I_a$ .

Suponiendo una admitancia de rama entre dos nodos  $\boxed{m}$  y  $\boxed{n}$  como se muestra en la figura 3.6; por la ley de Kirchoff en el nodo  $\boxed{m}$ ,  $I_m = I_a$  y en el nodo  $\boxed{n}$ ,  $I_n = -I_a$ . Representándose de forma vectorial por,

$$\begin{bmatrix} I_m \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} I_a \quad (3.38)$$

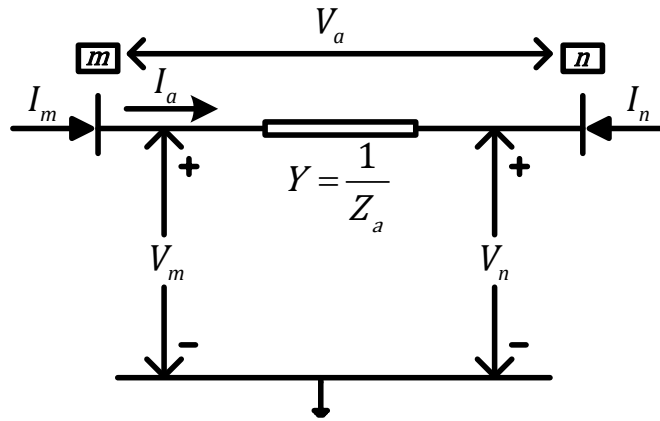


Fig. 3.6 Caída de voltaje  $V_a$  de la rama elemental, corriente de rama  $I_a$ , corrientes inyectadas  $I_m$  e  $I_n$  y voltajes de nodo  $V_m$  y  $V_n$  respecto a la red de referencia [15].

La caída de voltaje en la dirección de  $I_a$  esta dada por la ecuación  $V_a = V_m - V_n$ , que expresada en forma de vector es

$$V_a = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} V_m \\ V_n \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Sustituyendo la expresión (3.39) en la ecuación de admitancia  $Y_a V_a = I_a$  se tiene,

$$Y_a [1 \quad -1] \begin{bmatrix} V_m \\ V_n \end{bmatrix} = I_a \quad (3.40)$$

y al multiplicar ambos lados de la ecuación (3.40) por el vector columna de la ecuación (3.38), se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} Y_a \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_m \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m \\ I_n \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

la cual es simplificada para obtener

$$\begin{bmatrix} Y_a & -Y_a \\ -Y_a & Y_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_m \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m \\ I_n \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Esta es la ecuación de admitancias nodales para la rama  $Y_a$ , cuya matriz de coeficientes es la matriz de admitancias nodales, mejor conocida como  $Y_{bus}$ , la cual resulta muy importante en el proceso de estimación debido a que se hace uso de ella en la formación del Jacobiano de mediciones  $H$ , sobre todo cuando se tienen mediciones de inyecciones de potencia nodales en el sistema.

### 3.7. ESTIMACIÓN DE MÁXIMA VEROSIMILITUD

El objetivo de la estimación de estado es determinar el estado más probable del sistema basado en las cantidades que son medidas. Una forma de lograr esto es a través de la estimación de máxima verosimilitud, método utilizado ampliamente en la estadística, en el cual se supone a los errores de medición con una distribución de probabilidad conocida con parámetros desconocidos. Esta función es conocida como función de probabilidad y alcanza su valor máximo cuando los parámetros desconocidos se eligen para ser más cercanos a sus valores reales [4].

Los errores en las mediciones se suponen comúnmente como una distribución Gaussiana (Normal) cuyos parámetros son la media  $\mu$  y la varianza  $\sigma^2$ . Entonces el problema de la estimación de máxima verosimilitud se debe resolver para estos dos parámetros.

### 3.7.1. FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD GAUSSIANA

La función de densidad de probabilidad (f.d.p) Normal para una variable aleatoria  $z$  se define como [33]:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (3.43)$$

Donde

$z$ , variable aleatoria

$\mu$ , media (o valor esperado) de  $z = E(z)$

$\sigma$ , desviación estándar de  $z$

La función  $f(z)$  cambia su forma dependiendo de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ . Su forma puede ser normalizada mediante el siguiente cambio de variables:

$$u = \frac{z - \mu}{\sigma}$$

Dando como resultado:

$$E(u) = \frac{1}{\sigma}(E(z) - \mu) = 0$$

$$Var(u) = \frac{1}{\sigma^2}Var(z - \mu) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1.0$$

Por lo tanto, la nueva función se convierte en:

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \quad (3.44)$$

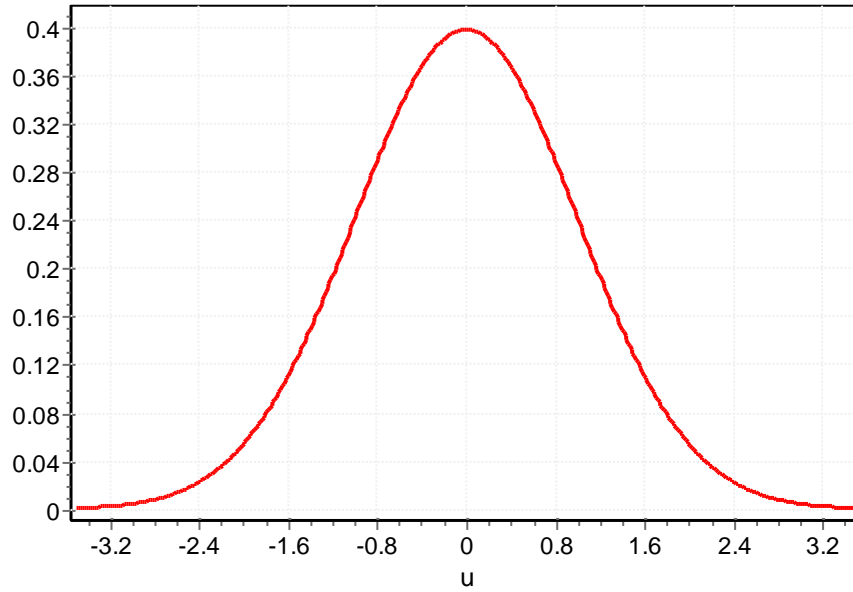


Fig. 3.7 Función de Densidad de Probabilidad Gaussiana (Normal) Estándar,  $\Phi(u)$ .

En este trabajo de tesis se realizó una simulación aleatoria [35] para representar los errores en las mediciones, es decir, a cada valor medido se le buscó un número aleatorio que lo sustituyera en el proceso de estimación. Esto considerando una incertidumbre en cada medición del  $\pm 10\%$ .

La figura 3.8 muestra la ejemplificación de cómo se realizó el proceso para encontrar el nuevo valor de la medición con incertidumbre,

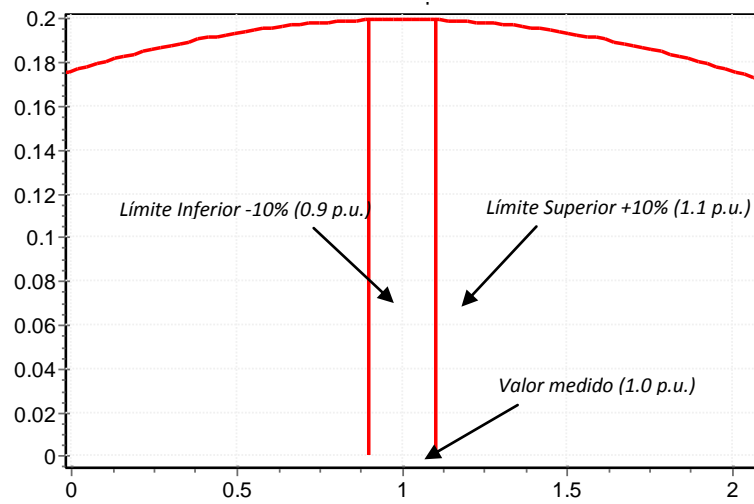


Fig. 3.8 Obtención de un número aleatorio entre 0.9-1.1 p.u. (valor medido 1.0 p.u.).

### 3.7.2. LA FUNCIÓN OBJETIVO

El conjunto de funciones de densidad de probabilidad puede ser expresado simplemente como el producto individual de las f.d.p's, si cada medición se supone independiente de las demás [34],

$$f_m = (f_{z_1})(f_{z_2}) \dots (f_{z_m})$$

La función  $f_m(z)$  se llama función de probabilidad de  $z$ , y es una medida de la probabilidad de observar el conjunto particular de mediciones en el vector  $z$ .

La estimación de máxima verosimilitud maximiza la función de probabilidad para un conjunto de observaciones dadas  $z_1, z_2, \dots, z_m$ . Por lo tanto, resulta indispensable resolver el siguiente sistema [4, 5]:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } \log f_m(z) \\ &\quad \text{O} \\ &\text{minimizar } \sum_{i=1}^m \left( \frac{z_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.45)$$

Este problema de minimización puede reescribirse en términos del residual  $r_i$  de la medición  $i$ , que se define como:

$$r_i = z_i - \mu_i = z_i - E(z_i)$$

Donde la media  $\mu_i$ , o el valor esperado  $E(z_i)$  de la medición  $z_i$  puede expresarse como  $h_i(x)$ , que es una función no lineal que relaciona al vector de estado  $x$  con la  $i$ -ésima medición. El peso del cuadrado de cada residual  $r_i^2$  es representado por  $W_{ii}$ , que es inversamente proporcional a la varianza del error de la medición. Estas definiciones simplifican la ecuación (3.45), la cual puede formularse como:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } J(x) &= \sum_{i=1}^m W_{ii} r_i^2 \\ \text{sujeto a } z_i &= h_i(x) + r_i, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.46)$$

La solución de este problema es lo que se conoce como el *Estimador de Cuadrados Mínimos Ponderados* de  $x$ .

### 3.8. ALGORITMO DE ESTIMACIÓN DE ESTADO POR CUADRADOS MÍNIMOS

La estimación de estado consiste en resolver el problema de cuadrados mínimos que se menciona en la ecuación (3.46), y su función objetivo se escribe como [4, 5],

$$\begin{aligned} J(x) &= [z - h(x)]^T R^{-1} [z - h(x)] \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{[z_i - h_i(x)]^2}{\sigma_i^2} \end{aligned} \quad (3.47)$$

en donde [40],

$$\sigma_i = (0.02 \cdot m + 0.0052 \cdot f_s) / 3$$

Deben cumplirse las condiciones de optimalidad de primer orden, que en este caso son

$$\frac{\partial J(x)}{\partial x} = 0 \Rightarrow H^T(x) W [z - h(x)] = 0 \quad (3.48)$$

donde  $W = R^{-1}$  y

$$H(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x}$$

es la matriz Jacobiano del vector  $h(x)$ , de dimensión  $m \times n$ , donde  $m$  es el número de mediciones y  $n = 2N - 1$ , siendo  $N$  el número de nodos. Debido a que lo que se busca es

encontrar el valor de  $\hat{x}$  que satisfaga la ecuación (3.48), la forma más eficaz es mediante el método iterativo de Newton-Raphson. El sistema lineal de  $n$  ecuaciones, conocidas como *ecuaciones normales*, que debe resolverse en cada iteración es [14]:

$$G(x_k)\Delta x_k = H^T(x_k)W[z - h(x_k)] \quad (3.49)$$

donde  $x_k$  representa el valor de  $x$  en la iteración  $k$ -ésima y

$$G(x_k) = H^T(x_k)WH(x_k) \quad (3.50)$$

es la matriz de ganancia, la cual es dispersa, simétrica y definida positiva.

El algoritmo iterativo para el problema de estimación de estado por cuadrados mínimos ponderados puede describirse de la siguiente forma [4]:

1. Establecer el índice de iteraciones en  $k = 0$ .
2. Iniciar el vector de estado  $x_0$  con perfil plano ( $V_i = 1$  p. u.,  $\theta_i = 0$ ).
3. Calcular los residuos  $\Delta z_k = z - h(x_k)$ .
4. Obtener el Jacobiano  $H(x_k)$  y calcular  $G(x_k) = H^T(x_k)WH(x_k)$ .
5. Resolver el sistema  $G(x_k)\Delta x_k = H^T(x_k)W\Delta z_k$
6. Actualizar el vector de estado  $x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$  y hacer  $k = k + 1$ .
7. Si alguno de los elementos de  $\Delta x$  es mayor que una determinada tolerancia, regresar al paso 3. De lo contrario, o si  $k$  excede un valor prefijado, detener el proceso.

### 3.8.1. FUNCIÓN DE MEDICIONES, $h(x_k)$ [4]

Las mediciones más comúnmente utilizadas en el proceso de estimación de estado son los flujos de potencia en las líneas, inyecciones de potencia en los nodos, magnitudes de voltaje y flujo de corriente en las líneas; para desarrollar el algoritmo de este trabajo se emplearon los primeros tres tipos. Estas mediciones se expresan en términos de las

variables de estado. Para un sistema que cuenta con  $N$  nodos, el vector de estado tiene  $n = (2N - 1)$  variables en total, de las cuales  $N$  son magnitudes de voltaje y  $(N - 1)$  ángulos de fase. El ángulo de fase del nodo de referencia toma el valor de 0 y jamás cambia, es por eso que este elemento no se actualiza en el proceso iterativo de la estimación. El vector de estado  $x$  tiene la siguiente forma tomando en cuenta que el nodo 1 es elegido como la referencia [1]:

$$x^T = [\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_N, V_1, V_2, \dots, V_N]$$

Partiendo del modelo  $\pi$  para las ramas de la red de la figura 3.9, las expresiones  $h(x^k)$  para cada uno de los tipos de mediciones mencionadas anteriormente son:

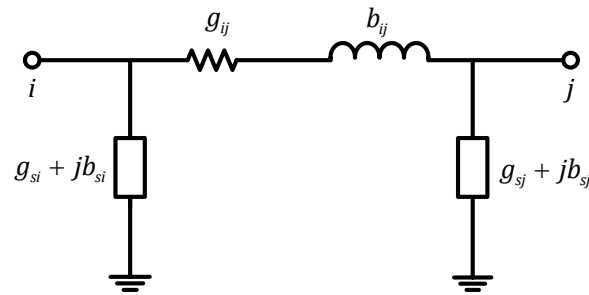


Fig. 3.9 Modelo  $\pi$  de dos puertos para una rama de red [4].

- Flujos de potencia real y reactiva del nodo  $i$  al nodo  $j$ :

$$P_{ij} = V_i^2 g_{ij} - V_i V_j g_{ij} \cos \theta_{ij} - V_i V_j b_{ij} \sin \theta_{ij} \quad (3.51)$$

$$Q_{ij} = -V_i^2 (b_{ij} + b_{si}) + V_i V_j b_{ij} \cos \theta_{ij} - V_i V_j g_{ij} \sin \theta_{ij} \quad (3.52)$$

- Inyecciones de potencia real y reactiva en el nodo  $i$ :

$$P_i = V_i \sum_{j \in N} V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) \quad (3.53)$$

$$Q_i = V_i \sum_{j \in N} V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) \quad (3.54)$$



- Magnitud del flujo de corriente del nodo  $i$  al nodo  $j$ :

$$|I_{ij}| = \frac{(P_{ij}^2 + Q_{ij}^2)^{1/2}}{V_i} \quad (3.55)$$

Donde:

$V_i, \theta_i$  es la magnitud de voltaje y ángulo de fase del bus  $i$ .

$\theta_{ij}$  es el desfase entre los nodos  $i$  y  $j$ .

$G_{ij} + B_{ij}$  es el elemento  $ij$ -ésimo de la matriz de admitancias del sistema.

$g_{ij} + b_{ij}$  es la admitancia de la rama en serie conectada entre el nodo  $i$  y  $j$ .

$g_{si} + b_{si}$  es la admitancia de la rama en derivación conectada en el nodo  $i$ .

### 3.8.2. VECTOR DE MEDICIONES, $z$ [14]

El vector de mediciones  $z$  está conformado por los términos reales que corresponden a los flujos de potencia activa y reactiva, inyecciones de potencia activa y reactiva, y magnitudes de voltaje o corriente.

Está compuesto por las  $m$  mediciones que se tienen del sistema, las cuales pueden ser expresadas en función de las  $n$  componentes del vector de estado  $x$ , como se muestra en la ecuación (3.56). El tamaño del vector  $z$  se ajusta a  $(m \times 1)$  [1]:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ h_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ h_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{bmatrix} = h(x) + \varepsilon \quad (3.56)$$

Donde:

$h_i(x)$  es la función no lineal que relaciona la medición  $i$  con el vector de estado  $x$ .

$\varepsilon^T = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m]$  es el vector de error en las mediciones.

### 3.8.3. JACOBIANO DE MEDICIONES, $H$ [15]

El Jacobiano de mediciones está conformado por las derivadas parciales de las funciones no lineales  $h(x)$  que relacionan la medición  $i$  con el vector de estado  $x$ , en donde cada fila de  $H$  corresponde únicamente a una de las cantidades medidas. La dimensión de dicha matriz será de  $m \times n$  y tiene la siguiente estructura.

$$H = \begin{array}{cccc|cccc}
 \theta_2 & \theta_3 & \dots & \theta_N & V_1 & V_2 & \dots & V_N \\
 \hline
 0 & & & & 1 & & & \\
 & 0 & & & & 1 & & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & \\
 & & & 0 & & & & 1 \\
 \hline
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \dots & \frac{\partial P_{ij}}{\partial \theta_i} & \frac{\partial P_{ij}}{\partial \theta_j} & \dots & \dots & \frac{\partial P_{ij}}{\partial V_i} & \frac{\partial P_{ij}}{\partial V_j} & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \dots & \frac{\partial P_{ji}}{\partial \theta_i} & \frac{\partial P_{ji}}{\partial \theta_j} & \dots & \dots & \frac{\partial P_{ji}}{\partial V_i} & \frac{\partial P_{ji}}{\partial V_j} & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \dots & \frac{\partial Q_{ij}}{\partial \theta_i} & \frac{\partial Q_{ij}}{\partial \theta_j} & \dots & \dots & \frac{\partial Q_{ij}}{\partial V_i} & \frac{\partial Q_{ij}}{\partial V_j} & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \dots & \frac{\partial Q_{ji}}{\partial \theta_i} & \frac{\partial Q_{ji}}{\partial \theta_j} & \dots & \dots & \frac{\partial Q_{ji}}{\partial V_i} & \frac{\partial Q_{ji}}{\partial V_j} & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \frac{\partial P_1}{\partial \theta_2} & \dots & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial \theta_N} & \frac{\partial P_1}{\partial V_1} & \dots & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial V_N} \\
 \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
 \frac{\partial P_N}{\partial \theta_2} & \dots & \dots & \frac{\partial Q_N}{\partial \theta_N} & \frac{\partial P_N}{\partial V_1} & \dots & \dots & \frac{\partial P_N}{\partial V_N} \\
 \frac{\partial Q_1}{\partial \theta_2} & \dots & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial \theta_N} & \frac{\partial Q_1}{\partial V_1} & \dots & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial V_N} \\
 \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
 \frac{\partial Q_N}{\partial \theta_2} & \dots & \dots & \frac{\partial Q_N}{\partial \theta_N} & \frac{\partial Q_N}{\partial V_1} & \dots & \dots & \frac{\partial Q_N}{\partial V_N}
 \end{array}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{Magnitudes de Voltaje } V_i \\ \text{Flujos de línea } P_{ij} \\ \text{Flujos de línea } P_{ji} \\ \text{Flujos de línea } Q_{ij} \\ \text{Flujos de línea } Q_{ji} \\ \text{Inyecciones de Potencia } P_i \\ \text{Inyecciones de Potencia } Q_i \end{array} \right\}$

Fig. 3.10 Estructura típica del Jacobiano de mediciones  $H$  [15].

Las expresiones que forman cada bloque del Jacobiano de la figura 3.10 son las mencionadas a continuación:

- Magnitudes de voltaje

$$\frac{\partial V_i}{\partial \theta_i} = 0 \quad i = 1, \dots, N - 1$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial V_i} = 1$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial V_j} = 0$$

- Flujo de potencia activa

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial \theta_i} = V_i V_j g_{ij} \sin \theta_{ij} + V_i V_j b_{ij} \cos \theta_{ij}$$

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial \theta_j} = -V_i V_j g_{ij} \sin \theta_{ij} - V_i V_j b_{ij} \cos \theta_{ij}$$

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial V_i} = 2V_i g_{ij} - V_j g_{ij} \cos \theta_{ij} + V_j b_{ij} \sin \theta_{ij}$$

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial V_j} = -V_i g_{ij} \cos \theta_{ij} + V_i b_{ij} \sin \theta_{ij}$$

- Flujo de potencia reactiva

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \theta_i} = -V_i V_j b_{ij} \sin \theta_{ij} + V_i V_j g_{ij} \cos \theta_{ij}$$

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \theta_j} = V_i V_j b_{ij} \sin \theta_{ij} - V_i V_j g_{ij} \cos \theta_{ij}$$

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial V_i} = -2V_i (b_{ij} + b_{ij}^{sh}) + V_j b_{ij} \cos \theta_{ij} + V_j g_{ij} \sin \theta_{ij}$$

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial V_j} = V_i b_{ij} \cos \theta_{ij} + V_i g_{ij} \sin \theta_{ij}$$

- Inyecciones de potencia activa

$$\frac{\partial P_i}{\partial \theta_i} = \sum_{j=1}^N V_i V_j (-G_{ij} \sin \theta_{ij} + B_{ij} \cos \theta_{ij}) - V_i^2 B_{ii}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \theta_j} = V_i V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij})$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial V_i} = \sum_{j=1}^N V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) + V_i G_{ii}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial V_j} = V_i (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij})$$

- Inyecciones de potencia reactiva

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_i} = \sum_{j=1}^N V_i V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) - V_i^2 G_{ii}$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_j} = -V_i V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij})$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial V_i} = \sum_{j=1}^N V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) - V_i B_{ii}$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial V_j} = V_i (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij})$$

#### 3.8.4. MATRIZ DE GANANCIA, $G$

La matriz de ganancia se obtiene utilizando el Jacobiano de mediciones  $H$  y la matriz diagonal de pesos de las mediciones  $W$ . La expresión utilizada para calcular  $G$  es:

$$G(x_k) = H^T(x_k)WH(x_k) \quad (3.57)$$

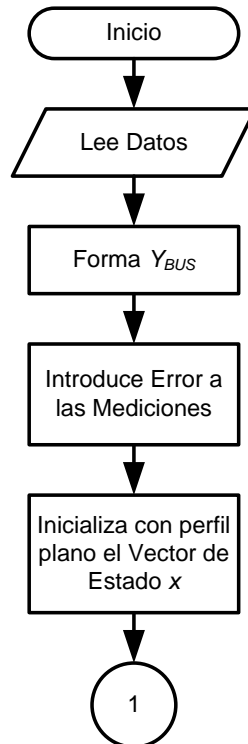
Tiene las siguientes propiedades [4]:

1. Es estructural y numéricamente simétrica.
2. Es dispersa, aunque menos dispersa que  $H$ .
3. En general es una matriz definida no negativa, debido a que todos sus eigenvalores son positivos.

Una recomendación en el cálculo de ésta matriz es que debe ser construida y almacenada como una matriz dispersa. Esto con la finalidad de ahorrar memoria y tener más eficiencia computacional.

### 3.9. DIAGRAMA DE BLOQUES DEL ESTIMADOR DE ESTADO

A continuación se presenta el diagrama del flujo del algoritmo elaborado para la realización de este trabajo. La finalidad es que a través de la representación grafica del algoritmo se conozcan las subrutinas empleadas en el proceso y poder comprender de una forma más sencilla el desarrollo del trabajo.



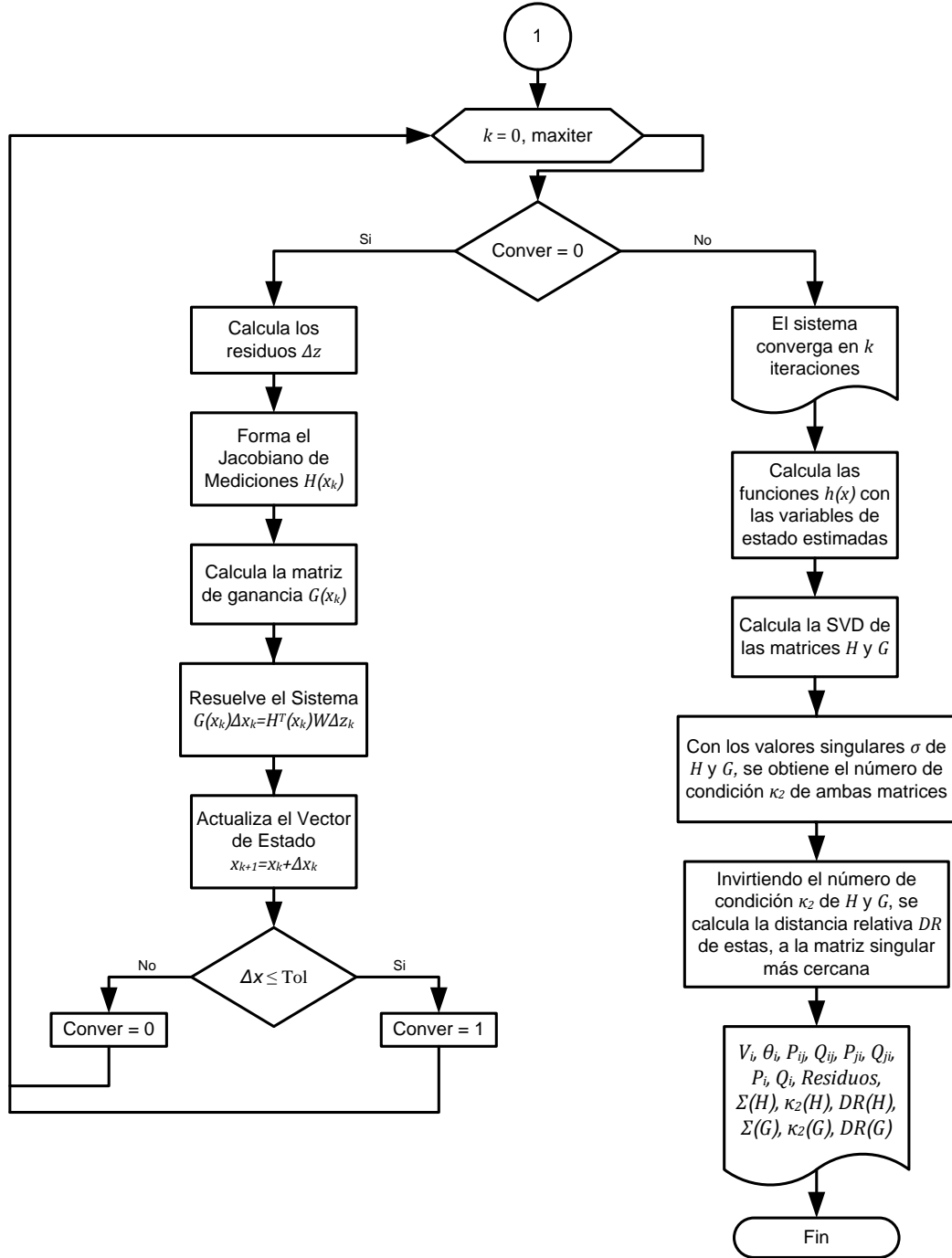


Fig. 3.11 Diagrama de flujo del algoritmo.

CAPÍTULO IV –

PRUEBAS Y  
RESULTADOS

## CAPÍTULO 4. PRUEBAS Y RESULTADOS

En esta sección se muestran los resultados obtenidos a partir de las formulaciones descritas en los Capítulos 2 y 3.

Para tener un mejor control y poder realizar una comparación puntual en las pruebas simuladas, se utilizaron dos sistemas eléctricos diferentes:

- 1) Sistema Stagg de 5 nodos y 7 elementos [38].
- 2) Sistema IEEE 14 de 14 nodos y 20 elementos [39].

Para cada una de las configuraciones simuladas en los sistemas de prueba se cuenta con diversas mediciones distribuidas a lo largo de toda la red. La tabla 4.1 describe la simbología empleada para distinguir el tipo de medición que se monitorea.

Tabla 4.1 Simbología de mediciones.

Simbología	Descripción
■	Medidor de Magnitud de Voltaje
●	Medidor de Flujos de Potencia
▲	Medidor de Inyecciones de Potencia

La figura 4.1 muestra un ejemplo de un sistema de dos nodos en el cual se monitorean las mediciones descritas anteriormente.

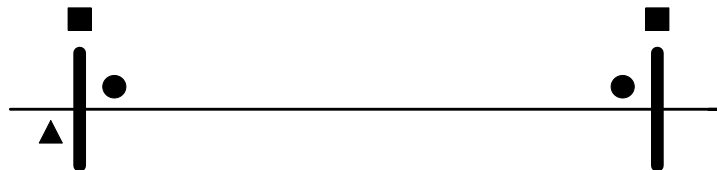


Fig. 4.1 Mediciones existentes en la red de 2 nodos.



### 4.1. ESTUDIO DE FLUJOS DE POTENCIA DEL SISTEMA STAGG [58]

Partiendo de un estudio de flujos de potencia convencional [58], se obtienen los valores que son empleados como mediciones para llevar a cabo la estimación de estado. La figura 4.2 muestra el primer sistema de prueba, Stagg, con los flujos de potencia calculados.

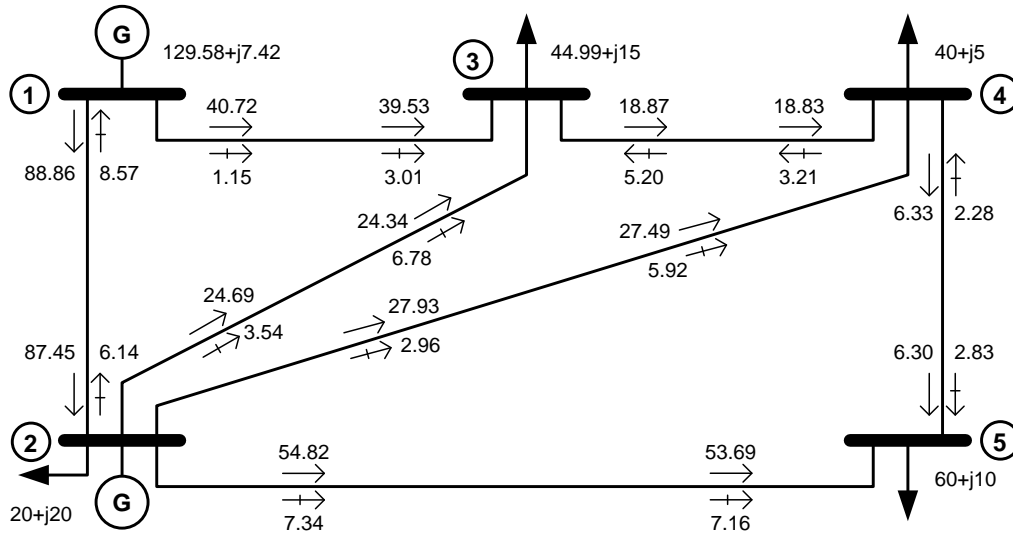


Fig. 4.2 Sistema de prueba de 5 nodos, Stagg [38].

Los resultados obtenidos para este sistema, fueron validados con los resultados proporcionados por el autor [38].

En las tablas 4.2, 4.3 y 4.4 se muestran de una forma más detallada las mediciones referentes a los voltajes nodales, flujos de potencia e inyecciones de potencia, respectivamente del sistema Stagg.

Tabla 4.2 Mediciones de voltajes nodales del sistema Stagg.

Nodo	$ V $ (p. u.)	$\theta$ (°)
1	1.06	0
2	1.04743773	-2.80635028
3	1.02417545	-4.9969686
4	1.02356638	-5.32913698
5	1.01793697	-6.15026407

Tabla 4.3 Mediciones de flujos de potencia del sistema Stagg.

Nodo $i$	Nodo $j$	$P_{ij}$ (MW)	$Q_{ij}$ (MVAR)
1	2	88.86381	-8.57949
1	3	40.72301	1.15839
2	3	24.69432	3.54641
2	4	27.93612	2.96197
2	5	54.82294	7.34297
3	4	18.87386	-5.20216
4	5	6.33303	-2.28478
2	1	-87.45336	6.14866
3	1	-39.53106	-3.01386
3	2	-24.3428	-6.78398
4	2	-27.49478	-5.92757
5	2	-53.69769	-7.1672
4	3	-18.83825	3.21235
5	4	-6.30232	-2.83279

Tabla 4.4 Mediciones de inyecciones de potencia del sistema Stagg.

Nodo	$P_{Gen}$ (p.u.)	$Q_{Gen}$ (p.u.)	$P_{Car}$ (p.u.)	$Q_{Car}$ (p.u.)
1	1.2958	-0.07421	0	0
2	0.40	0.30	0.20	0.10
3	0	0	0.45	0.15
4	0	0	0.40	0.05
5	0	0	0.60	0.10

## 4.2. ROBUSTEZ DE LA ESTIMACIÓN DE ESTADO DEL SISTEMA STAGG

Con base en las mediciones anteriores, se realiza el estudio de estimación de estado para distintos casos del sistema Stagg, y se analiza la robustez numérica del Jacobiano de mediciones  $H$  y de la matriz de ganancia  $G$  de cada estudio.

A partir del análisis de robustez se obtiene el rango numérico, valores singulares, número de condición, así como las matrices  $U$  y  $V$  que contienen los vectores singulares izquierdos y derechos respectivamente, de cada matriz. Con esto se pretende identificar que configuración es la más robusta al momento de estimar el estado del sistema, y que mediciones son las que más influyen en esto.

### 4.2.1. CASO BASE

El caso base del sistema Stagg corresponde al mostrado en la figura 4.3, en el cual existen 7 medidores de flujos de potencia, ubicados en las líneas 1-3, 2-1, 2-5, 3-2, 4-2, 4-5 y 5-2; 3 medidores de magnitud de voltaje en los nodos 1, 4 y 5; y 2 medidores de inyecciones de potencia localizados en los nodos 3 y 5, lo que da lugar a un total de 21 mediciones.

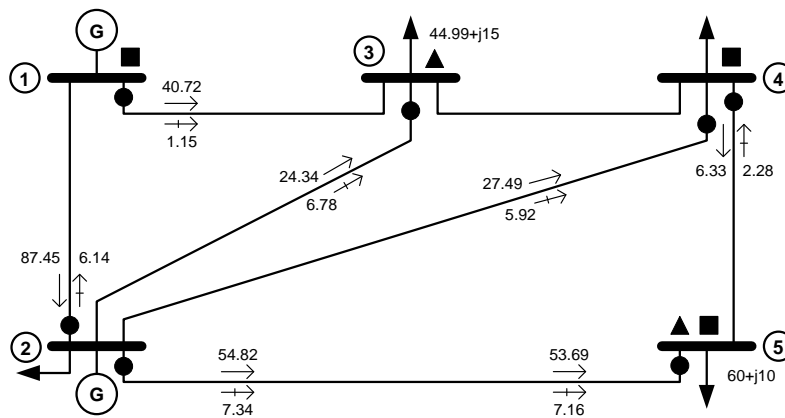


Fig. 4.3 Mediciones del sistema Stagg (Caso Base).

Dado que el sistema Stagg cuenta con 5 nodos, su vector de estado  $x$  tiene una dimensión dada por  $(2N - 1)$ , en donde  $N$  es el número de nodos. Para iniciar el estudio de estimación se necesita inicializar dicho vector con un perfil plano, el cual toma valores de 1 p.u. para magnitudes de voltaje y 0 para ángulos, por lo tanto el vector de estado inicial  $x_0$  tiene la siguiente forma:

$$x_0 = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \dots \\ |V_1| \\ |V_2| \\ |V_3| \\ |V_4| \\ |V_5| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como se mencionó al inicio del trabajo, cada medición de flujo e inyección de potencia obtenida del estudio de flujos previamente realizado, fue afectada en un intervalo del  $\pm 10\%$  con la intención de obtener una medida aleatoria y simular una incertidumbre en ella. Dicha afectación está basada en la simulación aleatoria del error. La tabla 4.5 proporciona los datos utilizados en la simulación de la estimación de estado para el caso base del sistema Stagg, en los que se observa el vector de mediciones  $z$  original, el vector  $z$  aleatorio que contiene la incertidumbre, y su varianza.

Tabla 4.5 Valores de  $z$  real,  $z$  aleatoria y varianza del sistema Stagg (Caso Base).

Medición	Variable	$z_i$ real	$z_i$ aleatoria	$\sigma_i^2$
$z_1$	$ V_1 $	1.06	1.06	0.00005242
$z_2$	$ V_4 $	1.02356	1.02356	0.00004896
$z_3$	$ V_5 $	1.01793	1.01793	0.00004844
$z_4$	$P_{1-3}$	0.40723	0.42609	0.00003979
$z_5$	$P_{2-5}$	0.54823	0.53519	0.00004992
$z_6$	$P_{4-5}$	0.06333	0.05726	0.00001505
$z_7$	$P_{2-1}$	-0.87453	-0.87261	0.00008644
$z_8$	$P_{3-2}$	-0.24343	-0.22485	0.00002543
$z_9$	$P_{4-2}$	-0.27495	-0.2724	0.00002839
$z_{10}$	$P_{5-2}$	-0.53698	-0.57867	0.00005405
$z_{11}$	$Q_{1-3}$	0.01158	0.01085	0.00003979
$z_{12}$	$Q_{2-5}$	0.07343	0.07022	0.00004992
$z_{13}$	$Q_{4-5}$	-0.02285	-0.02337	0.00001505
$z_{14}$	$Q_{2-1}$	0.06149	0.05943	0.00008644
$z_{15}$	$Q_{3-2}$	-0.06784	-0.07313	0.00002543
$z_{16}$	$Q_{4-2}$	-0.05928	-0.06124	0.00002839
$z_{17}$	$Q_{5-2}$	-0.07167	-0.06947	0.00005405
$z_{18}$	$P_3$	-0.45	-0.49472	0.00009002
$z_{19}$	$P_5$	-0.60	-0.6222	0.00010523
$z_{20}$	$Q_3$	-0.15	-0.13651	0.00009002
$z_{21}$	$Q_5$	-0.10	-0.09053	0.00010523

Se realiza la estimación de estado del sistema con el algoritmo elaborado. El vector de estimación de estado  $\hat{x}$  obtenido es mostrado en la tabla 4.6, y requiere de 4 iteraciones para alcanzar su solución y un tiempo de cómputo de 0.015625 segundos. A pesar de haber introducido incertidumbre en las mediciones, los valores estimados son muy similares a los obtenidos en el estudio de flujos.

Tabla 4.6 Vector de estimación de estado del sistema Stagg (Caso Base).

Variable de estado	Estudio de Flujos	Estudio de Estimación de Estado
$\theta_1$	0	0
$\theta_2$	-2.80635028	-2.827480089
$\theta_3$	-4.9969686	-5.047170646
$\theta_4$	-5.32913698	-5.322453897
$\theta_5$	-6.15026407	-6.221093887
$ V_1 $	1.06	1.060396984
$ V_2 $	1.04743773	1.047617133
$ V_3 $	1.02417545	1.024057242
$ V_4 $	1.02356638	1.023373192
$ V_5 $	1.01793697	1.01811359

Con ayuda del vector de estimación de estado, se realiza el cálculo de los residuos de las mediciones.

Tabla 4.7 Residuos de las mediciones del sistema Stagg (Caso Base).

Medición	Variable	$z_i$ aleatoria	$h_i(\hat{x})$	$r_i = z_i - h_i(\hat{x})$	$r_i^2$
$z_1$	$ V_1 $	1.06	1.06039698	-0.00039698	1.576E-07
$z_2$	$ V_4 $	1.02356	1.02337319	0.00018681	3.4897E-08
$z_3$	$ V_5 $	1.01793	1.01811359	-0.00018359	3.3705E-08
$z_4$	$P_{1-3}$	0.42609	0.4116824	0.01440596	0.00020753
$z_5$	$P_{2-5}$	0.53519	0.5554752	-0.02028677	0.00041155
$z_6$	$P_{4-5}$	0.05726	0.0681667	-0.01090952	0.00011902
$z_7$	$P_{2-1}$	-0.87261	-0.8821632	0.009555	9.1298E-05
$z_8$	$P_{3-2}$	-0.22485	-0.2466276	0.02178007	0.00047437
$z_9$	$P_{4-2}$	-0.2724	-0.2730098	0.00061002	3.7212E-07
$z_{10}$	$P_{5-2}$	-0.57867	-0.5439473	-0.03472354	0.00120572
$z_{11}$	$Q_{1-3}$	0.01085	0.0127658	-0.00192002	3.6865E-06
$z_{12}$	$Q_{2-5}$	0.07022	0.0715354	-0.00131939	1.7408E-06
$z_{13}$	$Q_{4-5}$	-0.02337	-0.0259434	0.00257815	6.6469E-06
$z_{14}$	$Q_{2-1}$	0.05943	0.0605296	-0.00110364	1.218E-06
$z_{15}$	$Q_{3-2}$	-0.07313	-0.0683297	-0.00480479	2.3086E-05
$z_{16}$	$Q_{4-2}$	-0.06124	-0.0621331	0.00089216	7.9595E-07
$z_{17}$	$Q_{5-2}$	-0.06947	-0.0689627	-0.00051035	2.6046E-07
$z_{18}$	$P_3$	-0.49472	-0.48795207	-0.00676765	4.5801E-05
$z_{19}$	$P_5$	-0.6222	-0.61175903	-0.01044455	0.00010909
$z_{20}$	$Q_3$	-0.13651	-0.13835355	0.00184333	3.3979E-06
$z_{21}$	$Q_5$	-0.09053	-0.09405067	0.00351848	1.238E-05

A continuación se menciona el análisis de robustez numérica realizado al Jacobiano de mediciones  $H$ , cuya forma es la mencionada en la figura (3.10), y a la matriz de ganancia  $G$ , obtenidas en la última iteración del caso base.

Tabla 4.8 Robustez numérica del Jacobiano de mediciones  $H$  del sistema Stagg (Caso Base).

<b>Rango Numérico</b>	
$rango(H)$	9
<b>Valores Singulares</b>	
$\sigma_1(H)$	55.35688
$\sigma_2(H)$	53.59602
$\sigma_3(H)$	27.9311
$\sigma_4(H)$	26.66792
$\sigma_5(H)$	16.95979
$\sigma_6(H)$	13.95492
$\sigma_7(H)$	9.195257
$\sigma_8(H)$	6.097714
$\sigma_9(H)$	0.7713648
<b>Número de Condición</b>	
$\kappa_2(H)$	71.76485

De la tabla 4.8 se puede observar que el rango del Jacobiano  $H$  tiene que ser 9, esto debido a que el sistema Stagg cuenta con esa cantidad de variables de estado. También debe ponerse especial atención en el valor singular más pequeño, en este caso  $\sigma_9$ , ya que si dicho valor es muy pequeño, tiene que despreciarse ocasionando que el rango numérico disminuya a 8, lo que significaría que dicha matriz se encuentra mal condicionada.

La distancia que existe entre  $H$  y la matriz singular más cercana es igual al valor singular menor  $\sigma_9 = 0.7713648$ , mientras que la distancia relativa resulta de la inversa del número de condición:

$$DR = \frac{1}{\kappa_2(H)} = 0.0139344$$

Al igual que en el Jacobiano de mediciones  $H$ , se realiza la descomposición en valores singulares para la matriz  $G$  dada por la ecuación (3.50). La tabla 4.9 muestra los resultados obtenidos.

Tabla 4.9 Robustez numérica de la matriz de ganancia  $G$  del sistema Stagg (Caso Base).

<b>Rango Numérico</b>	
$\text{rango}(G)$	9
<b>Valores Singulares</b>	
$\sigma_1(G)$	35556060
$\sigma_2(G)$	33259470
$\sigma_3(G)$	11531580
$\sigma_4(G)$	11150680
$\sigma_5(G)$	4756973
$\sigma_6(G)$	4392148
$\sigma_7(G)$	2744509
$\sigma_8(G)$	757933.3
$\sigma_9(G)$	11959.98
<b>Número de Condición</b>	
$\kappa_2(G)$	2972.919

Debido a que la matriz  $G$  resulta de un triple producto de matrices, en el cual se ven involucradas las matrices  $H$  y  $W$ , las cantidades que la conforman son muy grandes, es por esto que los valores singulares obtenidos también lo son. Al igual que el Jacobiano  $H$ , la matriz  $G$  tiene que ser de rango 9 debido a las variables de estado del sistema Stagg.

La distancia existente entre  $G$  y la matriz singular más cercana está dada por  $\sigma_9 = 11959.98$ , mientras que la distancia relativa es:

$$DR = \frac{1}{\kappa_2(G)} = 0.00033637$$

Los siguientes casos simulados del sistema Stagg siguen la misma metodología que el caso base, con la diferencia de que se empieza a disminuir el número de mediciones o se cambia su localización en cada uno de ellos.

### 4.2.2. CASO 2: ELIMINACIÓN DE INYECCIÓN EN NODO 3

El caso 2 del sistema Stagg se muestra en la figura 4.4, y a diferencia del caso base, no se considera el medidor de inyección en el nodo 3. Esto da lugar a un total de 19 mediciones.

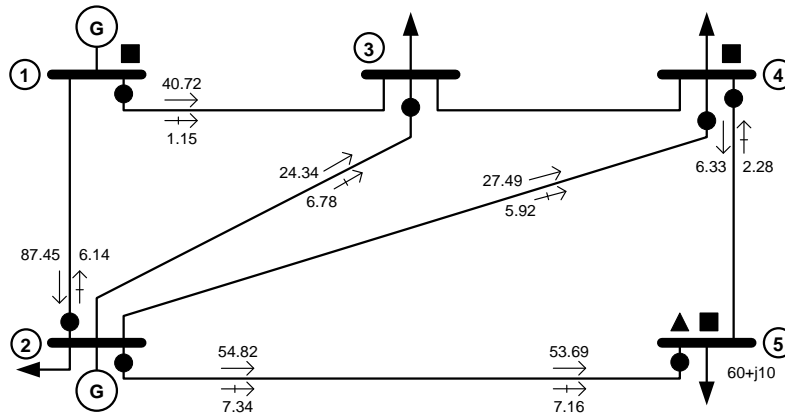


Fig. 4.4 Mediciones del sistema Stagg (Caso 2).

Los datos de la configuración 2 se muestran a continuación:

Tabla 4.10 Valores de  $z$  real,  $z$  aleatoria y varianza del sistema Stagg (Caso 2).

Medición	Variable	$z_i$ real	$z_i$ aleatoria	$\sigma_i^2$
$z_1$	$ V_1 $	1.06	1.06	0.00005242
$z_2$	$ V_4 $	1.02356	1.02356	0.00004896
$z_3$	$ V_5 $	1.01793	1.01793	0.00004844
$z_4$	$P_{1-3}$	0.40723	0.42609	0.00003979
$z_5$	$P_{2-5}$	0.54823	0.53519	0.00004992
$z_6$	$P_{4-5}$	0.06333	0.05726	0.00001505
$z_7$	$P_{2-1}$	-0.87453	-0.87261	0.00008644
$z_8$	$P_{3-2}$	-0.24343	-0.22485	0.00002543
$z_9$	$P_{4-2}$	-0.27495	-0.2724	0.00002839
$z_{10}$	$P_{5-2}$	-0.53698	-0.57867	0.00005405
$z_{11}$	$Q_{1-3}$	0.01158	0.01085	0.00003979
$z_{12}$	$Q_{2-5}$	0.07343	0.07022	0.00004992
$z_{13}$	$Q_{4-5}$	-0.02285	-0.02337	0.00001505
$z_{14}$	$Q_{2-1}$	0.06149	0.05943	0.00008644
$z_{15}$	$Q_{3-2}$	-0.06784	-0.07313	0.00002543



$z_{16}$	$Q_{4-2}$	-0.05928	-0.06124	0.00002839
$z_{17}$	$Q_{5-2}$	-0.07167	-0.06947	0.00005405
$z_{18}$	$P_5$	-0.60	-0.65963	0.00011063
$z_{19}$	$Q_5$	-0.10	-0.1037	0.00011063

El vector de estimación de estado  $\hat{x}$  obtenido se muestra en tabla 4.11, requiere de 4 iteraciones para alcanzar su solución y un tiempo de cómputo de 0.0312002 segundos; todo esto para una tolerancia de  $1 \times 10^{-5}$ .

Tabla 4.11 Vector de estimación de estado del sistema Stagg (Caso 2).

Variable de estado	Estudio de Flujos	Estudio de Estimación de Estado
$\theta_1$	0	0
$\theta_2$	-2.80635028	-2.83249382
$\theta_3$	-4.9969686	-4.93494861
$\theta_4$	-5.32913698	-5.39868523
$\theta_5$	-6.15026407	-6.28229546
$ V_1 $	1.06	1.0610793
$ V_2 $	1.04743773	1.04825695
$ V_3 $	1.02417545	1.02494259
$ V_4 $	1.02356638	1.02393642
$ V_5 $	1.01793697	1.01818945

Los residuos de las mediciones se enlistan en la tabla 4.12,

Tabla 4.12 Residuos de las mediciones del sistema Stagg (Caso 2).

Medición	Variable	$z_i$ aleatoria	$h_i(\hat{x})$	$r_i = z_i - h_i(\hat{x})$	$r_i^2$
$z_1$	$ V_1 $	1.06	1.0610793	-0.0010793	1.1649E-06
$z_2$	$ V_4 $	1.02356	1.02393642	-0.00037642	1.4169E-07
$z_3$	$ V_5 $	1.01793	1.01818945	-0.00025945	6.7316E-08
$z_4$	$P_{1-3}$	0.42609	0.4038032	0.02228517	0.00049663
$z_5$	$P_{2-5}$	0.53519	0.5653203	-0.03013192	0.00090793
$z_6$	$P_{4-5}$	0.05726	0.0678018	-0.01054465	0.00011119
$z_7$	$P_{2-1}$	-0.87261	-0.8848838	0.01227555	0.00015069
$z_8$	$P_{3-2}$	-0.22485	-0.2357016	0.01085407	0.00011781
$z_9$	$P_{4-2}$	-0.2724	-0.2799984	0.00759862	5.7739E-05
$z_{10}$	$P_{5-2}$	-0.57867	-0.5533897	-0.02528114	0.00063914
$z_{11}$	$Q_{1-3}$	0.01085	0.013816	-0.00297019	8.822E-06
$z_{12}$	$Q_{2-5}$	0.07022	0.0738486	-0.00363255	1.3195E-05

$z_{13}$	$Q_{4-5}$	-0.02337	-0.0237763	0.0004111	1.69E-07
$z_{14}$	$Q_{2-1}$	0.05943	0.0606258	-0.00119988	1.4397E-06
$z_{15}$	$Q_{3-2}$	-0.07313	-0.0711797	-0.00195478	3.8212E-06
$z_{16}$	$Q_{4-2}$	-0.06124	-0.0600043	-0.00123659	1.5292E-06
$z_{17}$	$Q_{5-2}$	-0.06947	-0.07009	0.00061699	3.8068E-07
$z_{18}$	$P_5$	-0.65963	-0.62084029	-0.0387861	0.00150436
$z_{19}$	$Q_5$	-0.1037	-0.09738894	-0.00631159	3.9836E-05

Los resultados del análisis numérico realizado al Jacobiano de mediciones  $H$  se presentan en la tabla 4.13.

Tabla 4.13 Robustez numérica del Jacobiano de mediciones  $H$  del sistema Stagg (Caso 2).

<b>Rango Numérico</b>	
$rango(H)$	9
<b>Valores Singulares</b>	
$\sigma_1(H)$	28.11227
$\sigma_2(H)$	27.04178
$\sigma_3(H)$	17.29709
$\sigma_4(H)$	14.04374
$\sigma_5(H)$	9.217396
$\sigma_6(H)$	7.131408
$\sigma_7(H)$	6.577424
$\sigma_8(H)$	6.053175
$\sigma_9(H)$	0.7710964
<b>Número de Condición</b>	
$\kappa_2(H)$	36.45752

La distancia existente entre  $H$  y la matriz singular más cercana es  $\sigma_9 = 0.7710964$ , y la distancia relativa resultante es:

$$DR = \frac{1}{\kappa_2(H)} = 0.02743$$

Los resultados de la descomposición en valores singulares para la matriz  $G$  se muestran en la tabla 4.14.

Tabla 4.14 Robustez numérica de la matriz de ganancia  $G$  del sistema Stagg (Caso 2)

<b>Rango Numérico</b>	
$\text{rango}(G)$	9
<b>Valores Singulares</b>	
$\sigma_1(G)$	11822990
$\sigma_2(G)$	11420790
$\sigma_3(G)$	4975560
$\sigma_4(G)$	4602292
$\sigma_5(G)$	2781629
$\sigma_6(G)$	1750134
$\sigma_7(G)$	1440790
$\sigma_8(G)$	751500.1
$\sigma_9(G)$	11958.8
<b>Número de Condición</b>	
$\kappa_2(G)$	988.6437

La distancia existente entre la matriz  $G$  y la matriz singular más cercana está dada por  $\sigma_9 = 11958.8$ , mientras que la distancia relativa es:

$$DR = \frac{1}{\kappa_2(G)} = 0.001011486$$

### 4.2.3. CASO 3: ELIMINACIÓN DE INYECCIONES EN LOS NODOS 3 Y 5

La configuración y datos del caso 3 del sistema Stagg, se presentan en la figura 4.5 y la tabla 4.15 respectivamente. Se eliminan los medidores de inyección de potencia de los nodos 3 y 5, por lo que solo cuenta con 7 medidores de flujo de potencia y 3 de magnitud de voltaje, obteniendo un total de 17 mediciones.

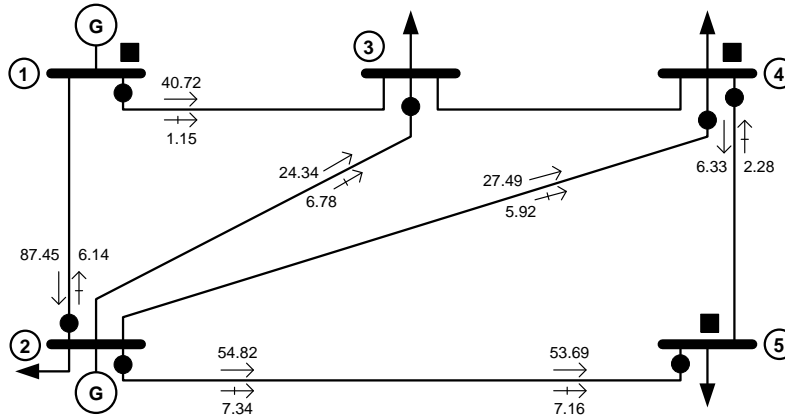


Fig. 4.5 Mediciones del sistema Stagg (Caso 3).

Tabla 4.15 Valores de  $z$  real,  $z$  aleatoria y varianza del sistema Stagg (Caso 3).

Medición	Variable	$z_i$ real	$z_i$ aleatoria	$\sigma_i^2$
$z_1$	$ V_1 $	1.06	1.06	0.00005242
$z_2$	$ V_4 $	1.02356	1.02356	0.00004896
$z_3$	$ V_5 $	1.01793	1.01793	0.00004844
$z_4$	$P_{1-3}$	0.40723	0.42609	0.00003979
$z_5$	$P_{2-5}$	0.54823	0.53519	0.00004992
$z_6$	$P_{4-5}$	0.06333	0.05726	0.00001505
$z_7$	$P_{2-1}$	-0.87453	-0.87261	0.00008644
$z_8$	$P_{3-2}$	-0.24343	-0.22485	0.00002543
$z_9$	$P_{4-2}$	-0.27495	-0.2724	0.00002839
$z_{10}$	$P_{5-2}$	-0.53698	-0.57867	0.00005405
$z_{11}$	$Q_{1-3}$	0.01158	0.01085	0.00003979
$z_{12}$	$Q_{2-5}$	0.07343	0.07022	0.00004992
$z_{13}$	$Q_{4-5}$	-0.02285	-0.02337	0.00001505
$z_{14}$	$Q_{2-1}$	0.06149	0.05943	0.00008644
$z_{15}$	$Q_{3-2}$	-0.06784	-0.07313	0.00002543
$z_{16}$	$Q_{4-2}$	-0.05928	-0.06124	0.00002839
$z_{17}$	$Q_{5-2}$	-0.07167	-0.06947	0.00005405

En la tabla 4.16 se muestra el vector de estimación de estado  $\hat{x}$  obtenido, el cual requiere de 4 iteraciones para alcanzar su solución y un tiempo de cómputo de 0.0156001 segundos; todo esto para una tolerancia de  $1 \times 10^{-5}$ .

Tabla 4.16 Vector de estimación de estado del sistema Stagg (Caso 3).

Variable de estado	Estudio de Flujos	Estudio de Estimación de Estado
$\theta_1$	0	0
$\theta_2$	-2.80635028	-2.83478324
$\theta_3$	-4.9969686	-4.93898643
$\theta_4$	-5.32913698	-5.40736172
$\theta_5$	-6.15026407	-6.23067913
$ V_1 $	1.06	1.06065596
$ V_2 $	1.04743773	1.04782478
$ V_3 $	1.02417545	1.02450137
$ V_4 $	1.02356638	1.02345305
$ V_5 $	1.01793697	1.01826741

Los residuos de las mediciones se enlistan en la tabla 4.17,

Tabla 4.17 Residuos de las mediciones del sistema Stagg (Caso 3).

Medición	Variable	$z_i$ aleatoria	$h_i(\hat{x})$	$r_i = z_i - h_i(\hat{x})$	$r_i^2$
$z_1$	$ V_1 $	1.06	1.06065596	-0.00065596	4.3028E-07
$z_2$	$ V_4 $	1.02356	1.02345305	0.00010695	1.1438E-08
$z_3$	$ V_5 $	1.01793	1.01826741	-0.00033741	1.1384E-07
$z_4$	$P_{1-3}$	0.42609	0.403807	0.02228136	0.00049646
$z_5$	$P_{2-5}$	0.53519	0.556123	-0.02093462	0.00043826
$z_6$	$P_{4-5}$	0.05726	0.0629239	-0.00566671	3.2112E-05
$z_7$	$P_{2-1}$	-0.87261	-0.8848934	0.0122852	0.00015093
$z_8$	$P_{3-2}$	-0.22485	-0.2356966	0.01084903	0.0001177
$z_9$	$P_{4-2}$	-0.2724	-0.2804435	0.0080437	6.4701E-05
$z_{10}$	$P_{5-2}$	-0.57867	-0.5445714	-0.03409949	0.00116278
$z_{11}$	$Q_{1-3}$	0.01085	0.013866	-0.00302019	9.1215E-06
$z_{12}$	$Q_{2-5}$	0.07022	0.0718605	-0.00164445	2.7042E-06
$z_{13}$	$Q_{4-5}$	-0.02337	-0.0245991	0.00123393	1.5226E-06
$z_{14}$	$Q_{2-1}$	0.05943	0.0606127	-0.00118678	1.4085E-06
$z_{15}$	$Q_{3-2}$	-0.07313	-0.0711544	-0.00198006	3.9206E-06
$z_{16}$	$Q_{4-2}$	-0.06124	-0.0600375	-0.00120341	1.4482E-06
$z_{17}$	$Q_{5-2}$	-0.06947	-0.0692276	-0.00024546	6.0248E-08

El análisis de robustez numérica realizado al Jacobiano de mediciones  $H$  de la última iteración del presente caso, se presenta en la tabla 4.18.

Tabla 4.18 Robustez numérica del Jacobiano de mediciones  $H$  del sistema Stagg (Caso 3)

<b>Rango Numérico</b>	
$rango(H)$	9
<b>Valores Singulares</b>	
$\sigma_1(H)$	26.18311
$\sigma_2(H)$	23.79672
$\sigma_3(H)$	13.82666
$\sigma_4(H)$	11.03389
$\sigma_5(H)$	8.552619
$\sigma_6(H)$	7.0914
$\sigma_7(H)$	6.506578
$\sigma_8(H)$	6.016307
$\sigma_9(H)$	0.7692769
<b>Número de Condición</b>	
$\kappa_2(H)$	34.036

La distancia que existe entre la matriz  $H$  y la matriz singular más cercana es el valor singular  $\sigma_9 = 0.7692769$ , y la distancia relativa es:

$$DR = \frac{1}{\kappa_2(H)} = 0.02938065$$

Los resultados de la SVD para la matriz  $G$  se muestran en la tabla 4.19.

Tabla 4.19 Robustez numérica de la matriz de ganancia  $G$  del sistema Stagg (Caso 3)

<b>Rango Numérico</b>	
$rango(G)$	9
<b>Valores Singulares</b>	
$\sigma_1(G)$	10505290
$\sigma_2(G)$	10081500
$\sigma_3(G)$	4109432
$\sigma_4(G)$	3922687
$\sigma_5(G)$	2769684
$\sigma_6(G)$	1741884

$\sigma_7(G)$	1431549
$\sigma_8(G)$	742366.3
$\sigma_9(G)$	11903.91
<b>Número de Condición</b>	
$\kappa_2(G)$	882.5074

La distancia existente entre la matriz  $G$  y la matriz singular más cercana está dada por  $\sigma_9 = 11903.91$ , mientras que la distancia relativa es:

$$DR = \frac{1}{\kappa_2(G)} = 0.001133135$$

Luego de haber realizado las simulaciones de los casos 2 y 3, puede observarse que existe una mejoría en la robustez numérica de las matrices  $H$  y  $G$ , cuando se comienzan a eliminar mediciones referentes a inyecciones de potencia. Comparado con el caso base, en el caso 2 al eliminar la inyección del nodo 3 existe una mejoría considerable en los números de condición de las matrices, es decir, se hacen más pequeños. Para el caso 3, cuando se decide eliminar el medidor de inyección restante del nodo 5, estos números mejoran aún más. Esto nos confirma que la existencia de inyecciones de potencia en el proceso de estimación, debilitan el condicionamiento de las matrices.

#### 4.2.4. CASO 4: ELIMINACIÓN DE UN MEDIDOR DE VOLTAJE Y DOS INYECCIONES

El caso 4 del sistema Stagg se muestra en la figura 4.6. Comparado con el caso base, se decide eliminar el medidor de voltaje en el nodo 4, así como los medidores de inyección de potencia de los nodos 3 y 5, por lo que cuenta únicamente con 7 medidores de flujo de potencia y 2 de magnitud de voltaje.

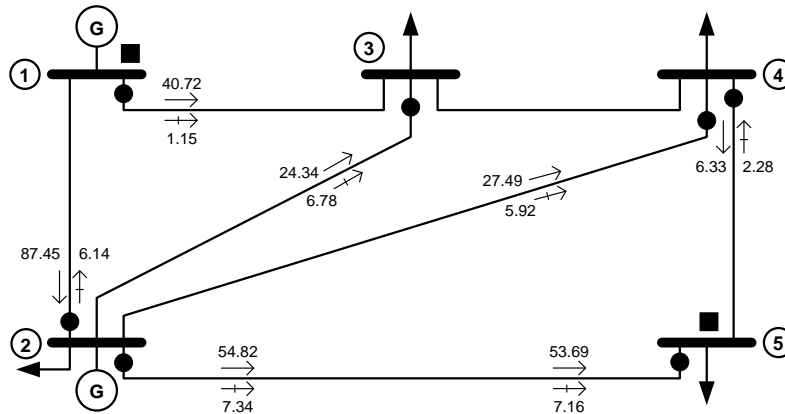


Fig. 4.6 Mediciones del sistema Stagg (Caso 4).

Los datos de la configuración 4 se muestran en la tabla 4.20, en donde puede observarse que a medida que las mediciones disminuyen, también lo hace el vector  $z$ :

Tabla 4.20 Valores de  $z$  real,  $z$  aleatoria y varianza del sistema Stagg (Caso 4).

Medición	Variable	$z_i$ real	$z_i$ aleatoria	$\sigma_i^2$
$z_1$	$ V_1 $	1.06	1.06	0.00005242
$z_2$	$ V_5 $	1.01793	1.01793	0.00004844
$z_3$	$P_{1-3}$	0.40723	0.42609	0.00003979
$z_4$	$P_{2-5}$	0.54823	0.53519	0.00004992
$z_5$	$P_{4-5}$	0.06333	0.05726	0.00001505
$z_6$	$P_{2-1}$	-0.87453	-0.87261	0.00008644
$z_7$	$P_{3-2}$	-0.24343	-0.22485	0.00002543
$z_8$	$P_{4-2}$	-0.27495	-0.2724	0.00002839
$z_9$	$P_{5-2}$	-0.53698	-0.57867	0.00005405
$z_{10}$	$Q_{1-3}$	0.01158	0.01085	0.00003979
$z_{11}$	$Q_{2-5}$	0.07343	0.07022	0.00004992
$z_{12}$	$Q_{4-5}$	-0.02285	-0.02337	0.00001505
$z_{13}$	$Q_{2-1}$	0.06149	0.05943	0.00008644
$z_{14}$	$Q_{3-2}$	-0.06784	-0.07313	0.00002543
$z_{15}$	$Q_{4-2}$	-0.05928	-0.06124	0.00002839
$z_{16}$	$Q_{5-2}$	-0.07167	-0.06947	0.00005405

El vector de estimación de estado  $\hat{x}$  obtenido se presenta en tabla 4.21, requiere de 4 iteraciones para alcanzar su solución y un tiempo de cómputo de 0.0468003 segundos, para una tolerancia de  $1 \times 10^{-5}$ .



Tabla 4.21 Vector de estimación de estado del sistema Stagg (Caso 4).

Variable de estado	Estudio de Flujos	Estudio de Estimación de Estado
$\theta_1$	0	0
$\theta_2$	-2.80635028	-2.83507687
$\theta_3$	-4.9969686	-4.93950429
$\theta_4$	-5.32913698	-5.40792628
$\theta_5$	-6.15026407	-6.23134383
$ V_1 $	1.06	1.0606017
$ V_2 $	1.04743773	1.0477694
$ V_3 $	1.02417545	1.02444482
$ V_4 $	1.02356638	1.02339466
$ V_5 $	1.01793697	1.01821047

Los resultados estimados siguen siendo muy aproximados a los obtenidos en el estudio de flujos de potencia.

Los residuos de las mediciones se enlistan en la tabla 4.22,

Tabla 4.22 Residuos de las mediciones del sistema Stagg (Caso 4).

Medición	Variable	$z_i$ aleatoria	$h_i(\hat{x})$	$r_i = z_i - h_i(\hat{x})$	$r_i^2$
$z_1$	$ V_1 $	1.06	1.0606017	-0.0006017	3.6204E-07
$z_2$	$ V_5 $	1.01793	1.01821047	-0.00028047	7.8663E-08
$z_3$	$P_{1-3}$	0.42609	0.4038075	0.02228088	0.00049644
$z_4$	$P_{2-5}$	0.53519	0.5561237	-0.02093527	0.00043829
$z_5$	$P_{4-5}$	0.05726	0.0629221	-0.00566498	3.2092E-05
$z_6$	$P_{2-1}$	-0.87261	-0.8848946	0.01228643	0.00015096
$z_7$	$P_{3-2}$	-0.22485	-0.2356959	0.01084838	0.00011769
$z_8$	$P_{4-2}$	-0.2724	-0.2804449	0.00804514	6.4724E-05
$z_9$	$P_{5-2}$	-0.57867	-0.5445708	-0.0341001	0.00116282
$z_{10}$	$Q_{1-3}$	0.01085	0.0138724	-0.0030266	9.1603E-06
$z_{11}$	$Q_{2-5}$	0.07022	0.0718636	-0.00164757	2.7145E-06
$z_{12}$	$Q_{4-5}$	-0.02337	-0.0246029	0.00123775	1.532E-06
$z_{13}$	$Q_{2-1}$	0.05943	0.0606111	-0.0011851	1.4045E-06
$z_{14}$	$Q_{3-2}$	-0.07313	-0.0711512	-0.0019833	3.9335E-06
$z_{15}$	$Q_{4-2}$	-0.06124	-0.0600432	-0.00119773	1.4346E-06
$z_{16}$	$Q_{5-2}$	-0.06947	-0.0692234	-0.00024959	6.2293E-08

Los residuos  $r_i$  obtenidos en la tabla anterior son pequeños, lo que nos indica que las variables de estado estimadas son buenas. Si se omitiera la simulación del error en las mediciones de entrada, la estimación se ajustaría mucho a las medidas reales, lo que ocasionaría que los residuos fueran aún más pequeños, rondando el orden de  $1 \times 10^{-7}$ .

El análisis de robustez numérica del Jacobiano de mediciones  $H$  se presenta en la siguiente tabla,

Tabla 4.23 Robustez numérica del Jacobiano de mediciones  $H$  del sistema Stagg (Caso 4).

<b>Rango Numérico</b>	
$rango(H)$	9
<b>Valores Singulares</b>	
$\sigma_1(H)$	27.33369
$\sigma_2(H)$	22.8066
$\sigma_3(H)$	15.34489
$\sigma_4(H)$	9.225513
$\sigma_5(H)$	6.765054
$\sigma_6(H)$	5.631896
$\sigma_7(H)$	4.465074
$\sigma_8(H)$	2.648929
$\sigma_9(H)$	1.09641
<b>Número de Condición</b>	
$\kappa_2(H)$	24.93017

La distancia que existe entre la matriz  $H$  y la matriz singular más cercana es el valor singular  $\sigma_9 = 1.09641$ , y la distancia relativa es:

$$DR = \frac{1}{\kappa_2(H)} = 0.04011204$$

Los resultados de la SVD para la matriz  $G$  se muestran en la tabla 4.24.

Tabla 4.24 Robustez numérica de la matriz de ganancia  $G$  del sistema Stagg (Caso 4)

<b>Rango Numérico</b>	
$rango(G)$	9
<b>Valores Singulares</b>	

$\sigma_1(G)$	10503930
$\sigma_2(G)$	10079470
$\sigma_3(G)$	4105813
$\sigma_4(G)$	3921060
$\sigma_5(G)$	2763854
$\sigma_6(G)$	1740903
$\sigma_7(G)$	1425332
$\sigma_8(G)$	742119.3
$\sigma_9(G)$	7759.294
<b>Número de Condición</b>	
$\kappa_2(G)$	1353.722

La distancia existente entre la matriz  $G$  y la matriz singular más cercana está dada por  $\sigma_9 = 7759.294$ , mientras que la distancia relativa es:

$$DR = \frac{1}{\kappa_2(G)} = 0.0007387041$$

Comparando los casos 3 y 4 es muy evidente el aumento en el número de condición de la matriz  $G$ , ocasionado por la eliminación de la medida de voltaje del nodo 4. Esto nos indica que las mediciones de voltaje son importantes en el proceso de estimación debido a que incrementan la robustez numérica de la matriz de ganancia.

Hasta el momento puede observarse que de todas las configuraciones simuladas, la que presenta una análisis de robustez más débil es sus matrices es el caso base, mientras que el que ha resultado más robusto hasta el momento es el caso 3, en donde se desprecian todos los medidores de inyección. Esto debido a que el número de condición de sus matrices es el más pequeño, y por tal motivo su distancia relativa a la matriz singular más cercana es mayor.

### 4.2.5. CASO 5: ELIMINACIÓN DE 2 MEDIDORES DE VOLTAJE, 2 DE INYECCIONES, Y 4 DE FLUJOS

En la presente configuración se han disminuido considerablemente las mediciones, con la finalidad de localizar el punto en el que el programa aún es capaz de estimar adecuadamente el estado del sistema, así como también encontrar para qué tipo de configuración la red se vuelve no observable a causa de la singularidad en sus matrices.

El caso 5 del sistema Stagg está representado por la figura 4.7. Se eliminaron los medidores de voltaje correspondientes a los nodos 4 y 5, los medidores de inyección de 3 y 5, y los medidores de flujo en las líneas 1-3, 2-1, 2-5 y 3-2. Además se anexaron dos medidores de flujo en las líneas 1-2 y 3-1, por lo que cuenta con un medidor de voltaje en el nodo 1, y 5 medidores de flujo de potencia, situados en las líneas 1-2, 3-1, 4-2, 4-5 y 5-2.

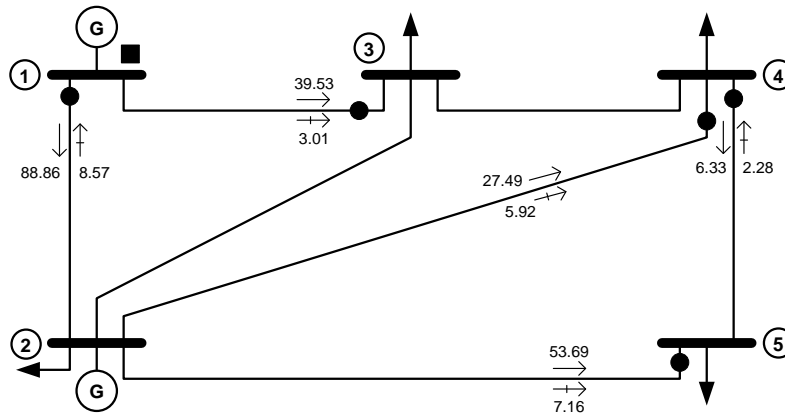


Fig. 4.7 Mediciones del sistema Stagg (Caso 5).

Los datos del caso 5 se muestran en la tabla 4.25,

Tabla 4.25 Valores de  $z$  real,  $z$  aleatoria y varianza del sistema Stagg (Caso 5).

Medición	Variable	$z_i$ real	$z_i$ aleatoria	$\sigma_i^2$
$z_1$	$ V_1 $	1.06	1.06	0.00005242
$z_2$	$P_{1-2}$	0.88864	0.92979	0.00009392
$z_3$	$P_{4-5}$	0.06333	0.06182	0.00001529
$z_4$	$P_{3-1}$	-0.39531	-0.3574	0.0000343

$z_5$	$P_{4-2}$	-0.27495	-0.27435	0.00002845
$z_6$	$P_{5-2}$	-0.53698	-0.49599	0.00004636
$z_7$	$Q_{1-2}$	-0.08579	-0.08499	0.00009392
$z_8$	$Q_{4-5}$	-0.02285	-0.02462	0.00001529
$z_9$	$Q_{3-1}$	-0.03014	-0.02823	0.0000343
$z_{10}$	$Q_{4-2}$	-0.05928	-0.05669	0.00002845
$z_{11}$	$Q_{5-2}$	-0.07167	-0.07329	0.00004636

El vector de estimación de estado  $\hat{x}$  obtenido se presenta en tabla 4.26, requiere de 4 iteraciones para alcanzar su solución y un tiempo de cómputo de 0.0312002 segundos, para una tolerancia de  $1 \times 10^{-5}$ .

Tabla 4.26 Vector de estimación de estado del sistema Stagg (Caso 5).

Variable de estado	Estudio de Flujos	Estudio de Estimación de Estado
$\theta_1$	0	0
$\theta_2$	-2.80635028	-2.93383721
$\theta_3$	-4.9969686	-4.50317862
$\theta_4$	-5.32913698	-5.36455059
$\theta_5$	-6.15026407	-6.07757437
$ V_1 $	1.06	1.06022017
$ V_2 $	1.04743773	1.04695581
$ V_3 $	1.02417545	1.02874056
$ V_4 $	1.02356638	1.02391833
$ V_5 $	1.01793697	1.01894161

Nuevamente, a pesar de la incertidumbre aleatoria introducida en los datos de entrada, los resultados estimados siguen siendo aproximados a los obtenidos en el estudio de flujos.

Los residuos de las mediciones se enlistan en la tabla 4.27,

Tabla 4.27 Residuos de las mediciones del sistema Stagg (Caso5).

Medición	Variable	$z_i$ aleatoria	$h_i(\hat{x})$	$r_i = z_i - h_i(\hat{x})$	$r_i^2$
$z_1$	$ V_1 $	1.06	1.06022017	-0.00022017	4.8477E-08
$z_2$	$P_{1-2}$	0.92979	0.9297857	6.2503E-06	3.9066E-11
$z_3$	$P_{4-5}$	0.06182	0.055158	0.00666545	4.4428E-05
$z_4$	$P_{3-1}$	-0.3574	-0.3574029	0	0
$z_5$	$P_{4-2}$	-0.27435	-0.2650302	-0.00931561	8.6781E-05

$z_6$	$P_{5-2}$	-0.49599	-0.5061263	0.01013713	0.00010276
$z_7$	$Q_{1-2}$	-0.08499	-0.0850168	2.2536E-05	5.0788E-10
$z_8$	$Q_{4-5}$	-0.02462	-0.0230273	-0.00159676	2.5497E-06
$z_9$	$Q_{3-1}$	-0.02823	-0.0282291	0	0
$z_{10}$	$Q_{4-2}$	-0.05669	-0.0583134	0.00162804	2.6505E-06
$z_{11}$	$Q_{5-2}$	-0.07329	-0.07136	-0.00192591	3.7091E-06

El análisis de robustez numérica del Jacobiano de mediciones  $H$  se presenta en la siguiente tabla,

Tabla 4.28 Robustez numérica del Jacobiano de mediciones  $H$  del sistema Stagg (Caso 5).

<b>Rango Numérico</b>	
$rango(H)$	9
<b>Valores Singulares</b>	
$\sigma_1(H)$	25.13146
$\sigma_2(H)$	20.69333
$\sigma_3(H)$	10.31306
$\sigma_4(H)$	9.337778
$\sigma_5(H)$	7.751132
$\sigma_6(H)$	5.828636
$\sigma_7(H)$	4.518605
$\sigma_8(H)$	3.94152
$\sigma_9(H)$	0.4295961
<b>Número de Condición</b>	
$\kappa_2(H)$	58.50021

La distancia entre la matriz  $H$  y la matriz singular más cercana es el  $\sigma_9 = 0.4296$ , y la distancia relativa es:

$$DR = \frac{1}{\kappa_2(H)} = 0.017094$$

Los resultados de la SVD para la matriz  $G$  se muestran en la tabla 4.29.

Tabla 4.29 Robustez numérica de la matriz de ganancia  $G$  del sistema Stagg (Caso 5)

<b>Rango Numérico</b>	
$rango(G)$	9

<b>Valores Singulares</b>	
$\sigma_1(G)$	7941832
$\sigma_2(G)$	6659219
$\sigma_3(G)$	3545053
$\sigma_4(G)$	3262840
$\sigma_5(G)$	2106532
$\sigma_6(G)$	669630.3
$\sigma_7(G)$	583371.9
$\sigma_8(G)$	429021.1
$\sigma_9(G)$	3528.176
<b>Número de Condición</b>	
$\kappa_2(G)$	2250.974

La distancia existente entre la matriz  $G$  y la matriz singular más cercana está dada por  $\sigma_9 = 7759.294$ , mientras que la distancia relativa es:

$$DR = \frac{1}{\kappa_2(G)} = 0.000444252$$

Aunque esta configuración converge normalmente y estima valores cercanos a las mediciones originales, puede notarse que la poca cantidad de medidores con los que cuenta producen que la robustez numérica de sus matrices se debilite considerablemente, esto debido a que está a punto de alcanzarse la no observabilidad en la red.

#### **4.2.6. CASO 6: ELIMINACIÓN DE 2 MEDIDORES DE VOLTAJE, 2 DE INYECCIONES, Y 5 DE FLUJOS**

En esta configuración se alcanza el punto en donde debido a la eliminación de las mediciones de flujo de potencia  $P_{3-1} + jQ_{3-1}$ , la red se vuelve no observable. Con base en el sistema de la figura 4.7 del caso 5, se elimina el medidor de flujo correspondiente a la línea 3-1, ocasionando que el nodo 3 simule un punto en la red no monitoreado, siendo imposible estimar sus variables de estado.

El caso 6 del sistema Stagg se muestra en la figura 4.8.

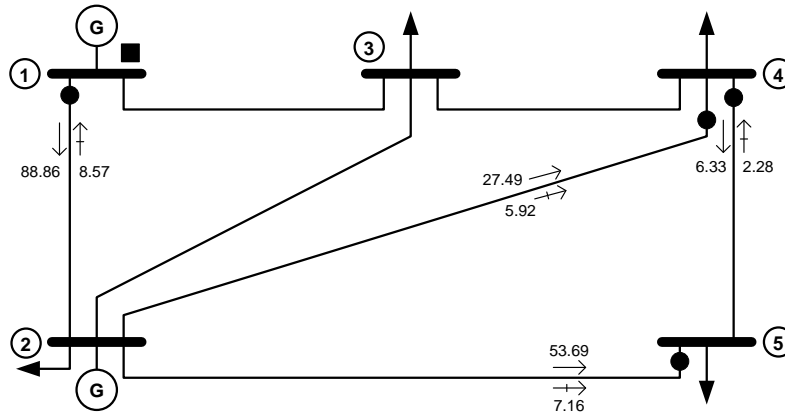


Fig. 4.8 Mediciones del sistema Stagg (Caso 6).

Al simular la presente configuración, el programa elaborado en este trabajo envía el siguiente mensaje:

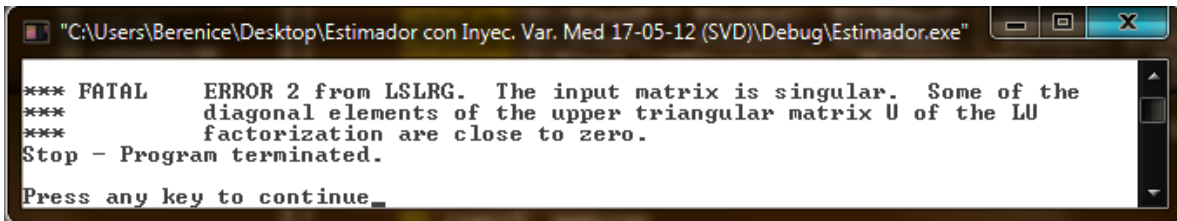


Fig. 4.9 Mensaje de error producido al simular el sistema Stagg (Caso 6).

El mensaje de error de la figura 4.9 está relacionado con la singularidad alcanzada en la matriz de ganancia  $G$  debido a la cantidad de ceros que contiene.

Los resultados obtenidos para este primer sistema de prueba Stagg muestran que las variables de estado estimadas en cada configuración son muy similares a las mediciones originales, y que además existen mediciones claves en el proceso de la estimación. Tal es el caso de las mediciones de magnitud de voltaje, las cuales contribuyen a mejorar la robustez numérica de la matriz  $G$ , disminuyendo el número de condición de esta. Y las mediciones de inyección de potencia, que provocan que dicho número se incremente, ocasionando que la matriz se acerque más a la singularidad.



### 4.3. ESTUDIO DE FLUJOS DE POTENCIA DEL SISTEMA IEEE 14 [58]

Partiendo de un estudio de flujos de potencia convencional [58], se adquieren los valores empleados como mediciones para llevar a cabo el estudio de estimación de estado. La figura 4.10 muestra el segundo sistema de prueba, IEEE 14.

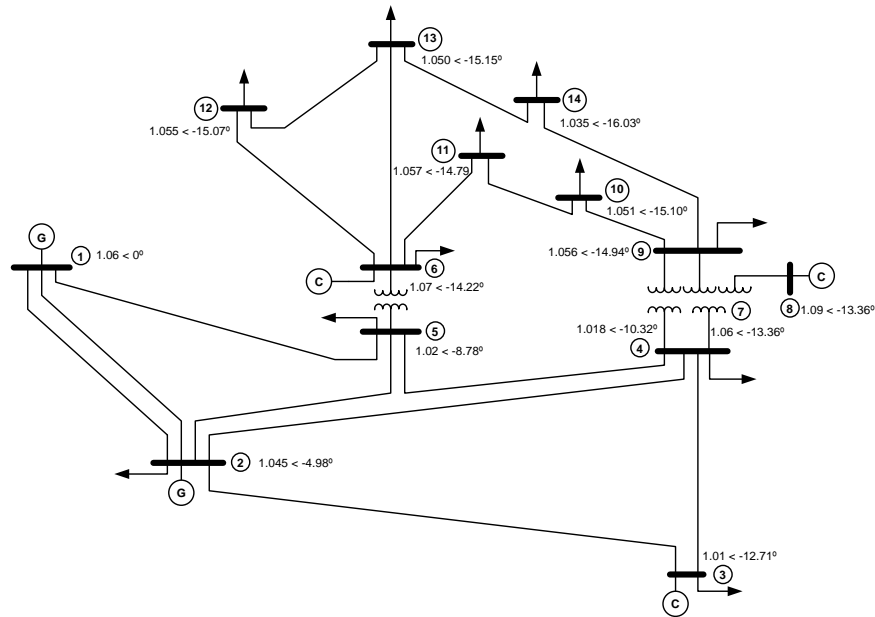


Fig. 4.10 Sistema de prueba de 14 nodos, IEEE 14 [39].

Las tablas 4.30, 4.31 y 4.32 muestran las mediciones referentes a los voltajes nodales, flujos de potencia e inyecciones de potencia, respectivamente del sistema IEEE 14.

Tabla 4.30 Mediciones de voltajes nodales del sistema IEEE 14.

Nodo	$ V $ (p. u.)	$\theta$ (°)
1	1.06	0
2	1.045	-4.98094874
3	1.01	-12.7179684
4	1.01862342	-10.3242221
5	1.02026375	-8.78257543
6	1.07	-14.222653
7	1.06195078	-13.3682477
8	1.09	-13.3682477
9	1.056346	-14.9466008

10	1.05132789	-15.1043243
11	1.05708185	-14.7952639
12	1.05522013	-15.0774235
13	1.05044256	-15.1589389
14	1.03579477	-16.0389343

Tabla 4.31 Mediciones de flujos de potencia del sistema IEEE 14.

Nodo <i>i</i>	Nodo <i>j</i>	$P_{ij}$ (MW)	$Q_{ij}$ (MVAR)
1	2	156.83329	-20.3927
1	5	75.55262	3.50381
2	3	73.1881	3.56507
2	4	56.13813	-2.2876
2	5	41.51221	0.76272
3	4	-23.33207	2.80923
4	5	-61.21916	15.66949
4	7	28.08697	-9.42083
4	9	16.08986	-0.32117
5	6	44.0631	12.82395
6	11	7.3412	3.47221
6	12	7.78191	2.49223
6	13	17.73999	7.1709
7	8	0	-16.90996
7	9	28.08698	5.7973
9	10	5.23893	4.306
9	14	9.43791	3.66577
10	11	-3.77418	-1.52883
12	13	1.61023	0.74304
13	14	5.63244	1.6917
2	1	-152.53844	27.65625
5	1	-72.78885	2.58046
3	2	-70.86793	1.58434
4	2	-54.46109	3.39375
5	2	-40.60994	-1.63393
4	3	23.70342	-5.42124
5	4	61.73569	-15.37047
7	4	-28.08697	11.11266
9	4	-16.08986	1.62467
6	5	-44.0631	-8.39498
11	6	-7.28649	-3.35764
12	6	-7.71023	-2.34304
13	6	-17.52845	-6.75431

8	7	0	17.3566
9	7	-28.08698	-4.99497
10	9	-5.22582	-4.27117
14	9	-9.32114	-3.41738
11	10	3.78649	1.55764
13	12	-1.60399	-0.7374
14	13	-5.57886	-1.58262

Tabla 4.32 Mediciones de inyecciones de potencia del sistema IEEE 14.

Nodo	$P_{Gen}$ (p.u.)	$Q_{Gen}$ (p.u.)	$P_{Car}$ (p.u.)	$Q_{Car}$ (p.u.)
1	2.3238	-0.1688	0	0
2	0.40	0	0.217	0.127
3	0	0	0.942	0.19
4	0	0	0.478	-0.039
5	0	0	0.076	0.016
6	0	0	0.112	0.075
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0
9	0	0	0.295	0.166
10	0	0	0.09	0.058
11	0	0	0.035	0.018
12	0	0	0.061	0.016
13	0	0	0.135	0.058
14	0	0	0.149	0.05

#### 4.4. ROBUSTEZ DE LA ESTIMACIÓN DE ESTADO DEL SISTEMA IEEE 14

Con base en las mediciones anteriores se realiza el estudio de estimación de estado para distintos casos del sistema IEEE 14 y se analiza la robustez numérica del Jacobiano de mediciones  $H$  y de la matriz de ganancia  $G$  de cada estudio.

A partir del análisis de robustez se obtiene el rango numérico, valores singulares, número de condición, así como las matrices  $U$  y  $V$  que contienen los vectores singulares izquierdos y derechos respectivamente, de cada matriz. Con esto se pretende identificar que configuración es la más robusta al momento de estimar el estado del sistema, y que mediciones son las que más influyen en esto.

### 4.4.1. CASO BASE

El caso base del sistema IEEE 14 corresponde al mostrado en la figura 4.11, en el cual existen 29 medidores de flujos de potencia, 3 medidores de magnitud de voltaje en los nodos 1, 3 y 4, así como 3 medidores de inyecciones de potencia en 2, 11 y 14, lo que da lugar a un total de 67 mediciones.

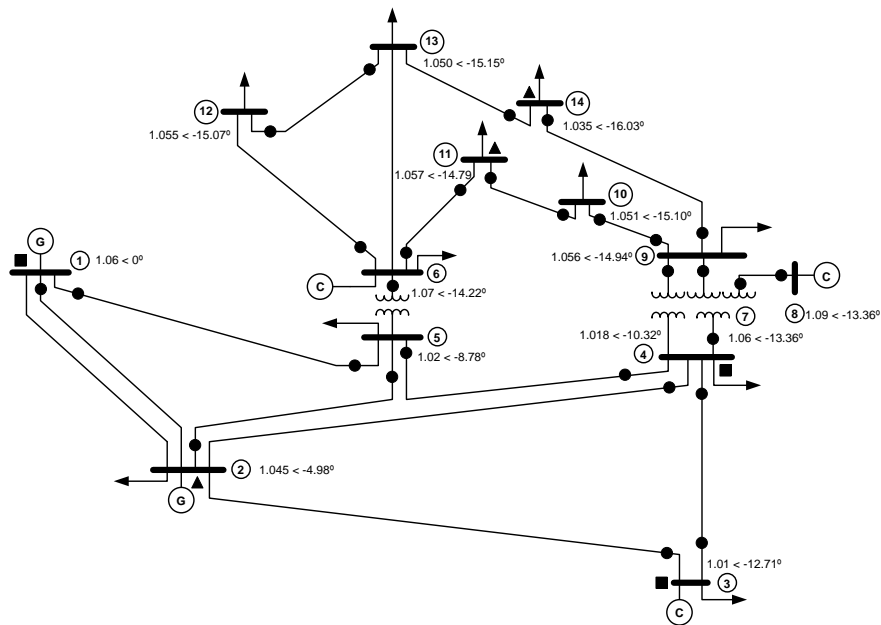


Fig. 4.11 Mediciones del sistema IEEE 14 (Caso Base).

El sistema IEEE 14 cuenta con 14 nodos, por lo que su vector de estado  $x$  tiene una dimensión de  $27 \times 1$ .

Al igual que en el primer sistema de prueba, cada medición de flujo e inyección de potencia obtenida del estudio de flujos realizado, fue afectada en un intervalo del  $\pm 10\%$  con la intención de obtener una medida aleatoria y simular una incertidumbre en ella.

La tabla 4.33 proporciona los datos utilizados en la simulación de la estimación de estado para el caso base del sistema IEEE 14, en los que se observa el vector de mediciones  $z$  original,  $z$  aleatoria y su varianza.

Tabla 4.33 Valores de  $z$  real,  $z$  aleatoria y varianza del sistema IEEE 14 (Caso Base).

Medición	Variable	$z_i$ real	$z_i$ aleatoria	$\sigma_i^2$
$z_1$	$ V_1 $	1.06	1.06	0.00005242
$z_2$	$ V_3 $	1.01	1.01	0.0000477
$z_3$	$ V_4 $	1.01862	1.01862	0.0000485
$z_4$	$P_{1-2}$	1.56833	1.64096	0.00020959
$z_5$	$P_{1-5}$	0.75552	0.73755	0.00007036
$z_6$	$P_{2-5}$	0.41512	0.37531	0.00003563
$z_7$	$P_{3-4}$	-0.23332	-0.23281	0.00002531
$z_8$	$P_{4-5}$	-0.61219	-0.56546	0.00005419
$z_9$	$P_{4-7}$	0.28086	0.27825	0.00002933
$z_{10}$	$P_{6-11}$	0.07341	0.07911	0.00001635
$z_{11}$	$P_{6-12}$	0.07819	0.07323	0.00001583
$z_{12}$	$P_{7-8}$	0	0	0.00002081
$z_{13}$	$P_{9-10}$	0.05238	0.05356	0.00001552
$z_{14}$	$P_{9-14}$	0.09437	0.0912	0.00001694
$z_{15}$	$P_{10-11}$	-0.03774	-0.04069	0.00001412
$z_{16}$	$P_{12-13}$	0.0161	0.01663	0.00001289
$z_{17}$	$P_{3-2}$	-0.70867	-0.68695	0.00006476
$z_{18}$	$P_{4-2}$	-0.54461	-0.59873	0.00005571
$z_{19}$	$P_{4-3}$	0.23703	0.2458	0.00002648
$z_{20}$	$P_{5-1}$	-0.72788	-0.66242	0.00006219
$z_{21}$	$P_{5-2}$	-0.40609	-0.36764	0.00003504
$z_{22}$	$P_{5-4}$	0.61735	0.62487	0.00005984
$z_{23}$	$P_{6-5}$	-0.44063	-0.42889	0.00004066
$z_{24}$	$P_{8-7}$	0	0	0.0000204
$z_{25}$	$P_{9-4}$	-0.16089	-0.17132	0.00002129
$z_{26}$	$P_{9-7}$	-0.28086	-0.26133	0.0000275
$z_{27}$	$P_{10-9}$	-0.05225	-0.05584	0.00001546
$z_{28}$	$P_{11-6}$	-0.07286	-0.07189	0.00001591
$z_{29}$	$P_{11-10}$	0.03786	0.03479	0.00001387
$z_{30}$	$P_{13-12}$	-0.01603	-0.01629	0.00001286
$z_{31}$	$P_{14-9}$	-0.09321	-0.08758	0.00001671
$z_{32}$	$P_{14-13}$	-0.05578	-0.05306	0.00001469
$z_{33}$	$Q_{1-2}$	-0.20392	-0.18683	0.00020959
$z_{34}$	$Q_{1-5}$	0.03503	0.03186	0.00007036
$z_{35}$	$Q_{2-5}$	0.00762	0.00778	0.00003563
$z_{36}$	$Q_{3-4}$	0.02809	0.02935	0.00002531
$z_{37}$	$Q_{4-5}$	0.15669	0.14696	0.00005419
$z_{38}$	$Q_{4-7}$	-0.0942	-0.08971	0.00002933
$z_{39}$	$Q_{6-11}$	0.03472	0.03498	0.00001635

$z_{40}$	$Q_{6-12}$	0.02492	0.02296	0.00001583
$z_{41}$	$Q_{7-8}$	-0.16909	-0.1643	0.00002081
$z_{42}$	$Q_{9-10}$	0.04306	0.04647	0.00001552
$z_{43}$	$Q_{9-14}$	0.03665	0.03434	0.00001694
$z_{44}$	$Q_{10-11}$	-0.01528	-0.01582	0.00001412
$z_{45}$	$Q_{12-13}$	0.00743	0.008	0.00001289
$z_{46}$	$Q_{3-2}$	0.01584	0.01531	0.00006476
$z_{47}$	$Q_{4-2}$	0.03393	0.03165	0.00005571
$z_{48}$	$Q_{4-3}$	-0.05421	-0.055	0.00002648
$z_{49}$	$Q_{5-1}$	0.0258	0.02471	0.00006219
$z_{50}$	$Q_{5-2}$	-0.01633	-0.01547	0.00003504
$z_{51}$	$Q_{5-4}$	-0.1537	-0.13986	0.00005984
$z_{52}$	$Q_{6-5}$	-0.08394	-0.08094	0.00004066
$z_{53}$	$Q_{8-7}$	0.17356	0.15746	0.0000204
$z_{54}$	$Q_{9-4}$	0.01624	0.01693	0.00002129
$z_{55}$	$Q_{9-7}$	-0.04994	-0.05307	0.0000275
$z_{56}$	$Q_{10-9}$	-0.04271	-0.04188	0.00001546
$z_{57}$	$Q_{11-6}$	-0.03357	-0.03129	0.00001591
$z_{58}$	$Q_{11-10}$	0.01557	0.01681	0.00001387
$z_{59}$	$Q_{13-12}$	-0.00737	-0.00723	0.00001286
$z_{60}$	$Q_{14-9}$	-0.03417	-0.03185	0.00001671
$z_{61}$	$Q_{14-13}$	-0.01582	-0.01436	0.00001469
$z_{62}$	$P_2$	0.183	0.19398	0.0000731
$z_{63}$	$P_{11}$	-0.035	-0.03556	0.00004008
$z_{64}$	$P_{14}$	-0.149	-0.14455	0.00005026
$z_{65}$	$Q_2$	0.2969	0.31803	0.0000731
$z_{66}$	$Q_{11}$	-0.018	-0.01757	0.00004008
$z_{67}$	$Q_{14}$	-0.05	-0.05133	0.00005026

A partir de estos datos, el vector de estimación de estado  $\hat{x}$  obtenido se muestra en la tabla 4.34, y requiere de 4 iteraciones para alcanzar su solución, así como un tiempo de cómputo de 0.125 segundos. A pesar de haber introducido incertidumbre en las mediciones, los valores estimados son muy parecidos a los obtenidos en el estudio de flujos.

Tabla 4.34 Vector de estimación de estado del sistema IEEE 14 (Caso Base).

Variable de estado	Estudio de Flujos	Estudio de Estimación de Estado
$\theta_1$	0	0
$\theta_2$	-4.98094874	-4.90558087

$\theta_3$	-12.7179684	-12.5416983
$\theta_4$	-10.3242221	-10.0838008
$\theta_5$	-8.78257543	-8.5686412
$\theta_6$	-14.222653	-14.2301781
$\theta_7$	-13.3682477	-13.3759847
$\theta_8$	-13.3682477	-13.3759847
$\theta_9$	-14.9466008	-14.9973923
$\theta_{10}$	-15.1043243	-15.1801759
$\theta_{11}$	-14.7952639	-14.8634815
$\theta_{12}$	-15.0774235	-15.1158828
$\theta_{13}$	-15.1589389	-15.2077651
$\theta_{14}$	-16.0389343	-16.1276429
$ V_1 $	1.06	1.05932505
$ V_2 $	1.045	1.04499209
$ V_3 $	1.01	1.00927352
$ V_4 $	1.01862342	1.0180474
$ V_5 $	1.02026375	1.02061007
$ V_6 $	1.07	1.02347111
$ V_7 $	1.06195078	1.0256366
$ V_8 $	1.09	1.05287176
$ V_9 $	1.056346	1.01626774
$ V_{10} $	1.05132789	1.01027784
$ V_{11} $	1.05708185	1.01349609
$ V_{12} $	1.05522013	1.01082075
$ V_{13} $	1.05044256	1.00651646
$ V_{14} $	1.03579477	0.99464378

Con ayuda del vector de estimación de estado, se realiza el cálculo de los residuos de las mediciones:

Tabla 4.35 Residuos de las mediciones del sistema IEEE 14 (Caso Base).

Medición	Variable	$z_i$ aleatoria	$h_i(\hat{x})$	$r_i = z_i - h_i(\hat{x})$	$r_i^2$
$z_1$	$ V_1 $	1.06	1.05932505	0.00067495	4.5556E-07
$z_2$	$ V_3 $	1.01	1.00927352	0.00072648	5.2777E-07
$z_3$	$ V_4 $	1.01862	1.0180474	0.0005726	3.2787E-07
$z_4$	$P_{1-2}$	1.64096	1.5410207	0.09993692	0.00998739
$z_5$	$P_{1-5}$	0.73755	0.7366516	0.00089567	8.0222E-07
$z_6$	$P_{2-5}$	0.37531	0.4009612	-0.02564784	0.00065781
$z_7$	$P_{3-4}$	-0.23281	-0.2390618	0.00625451	3.9119E-05
$z_8$	$P_{4-5}$	-0.56546	-0.6081994	0.0427415	0.00182684

$z_9$	$P_{4-7}$	0.27825	0.2931903	-0.00848511	7.1997E-05
$z_{10}$	$P_{6-11}$	0.07911	0.067022	0.01208748	0.00014611
$z_{11}$	$P_{6-12}$	0.07323	0.0707353	0.00249735	6.2367E-06
$z_{12}$	$P_{7-8}$	0	0	0	0
$z_{13}$	$P_{9-10}$	0.05356	0.0577242	-0.00416319	1.7332E-05
$z_{14}$	$P_{9-14}$	0.0912	0.0919693	-0.00076707	5.884E-07
$z_{15}$	$P_{10-11}$	-0.04069	-0.0310044	-0.00968091	9.372E-05
$z_{16}$	$P_{12-13}$	0.01663	0.0145069	0.00212569	4.5185E-06
$z_{17}$	$P_{3-2}$	-0.68695	-0.7004677	0.01352129	0.00018283
$z_{18}$	$P_{4-2}$	-0.59873	-0.5301358	-0.06859601	0.00470541
$z_{19}$	$P_{4-3}$	0.2458	0.2429693	0.00283221	8.0214E-06
$z_{20}$	$P_{5-1}$	-0.66242	-0.7103533	0.04793281	0.00229755
$z_{21}$	$P_{5-2}$	-0.36764	-0.3925366	0.0248943	0.00061973
$z_{22}$	$P_{5-4}$	0.62487	0.6132148	0.01165241	0.00013578
$z_{23}$	$P_{6-5}$	-0.42889	-0.4387219	-0.02000355	0.00040014
$z_{24}$	$P_{8-7}$	0	0	0	0
$z_{25}$	$P_{9-4}$	-0.17132	-0.16443	-0.01198894	0.00014373
$z_{26}$	$P_{9-7}$	-0.26133	-0.2680903	0.00675994	4.5697E-05
$z_{27}$	$P_{10-9}$	-0.05584	-0.0575434	0.00170324	2.901E-06
$z_{28}$	$P_{11-6}$	-0.07189	-0.0665798	-0.00530898	2.8185E-05
$z_{29}$	$P_{11-10}$	0.03479	0.0310828	0.00371086	1.377E-05
$z_{30}$	$P_{13-12}$	-0.01629	-0.0144543	-0.00183992	3.3853E-06
$z_{31}$	$P_{14-9}$	-0.08758	-0.0907434	0.00316418	1.0012E-05
$z_{32}$	$P_{14-13}$	-0.05306	-0.0504869	-0.00257537	6.6325E-06
$z_{33}$	$Q_{1-2}$	-0.18683	-0.2092229	0.02239049	0.00050133
$z_{34}$	$Q_{1-5}$	0.03186	0.0319277	-6.5502E-05	4.2905E-09
$z_{35}$	$Q_{2-5}$	0.00778	0.0091744	-0.00139009	1.9323E-06
$z_{36}$	$Q_{3-4}$	0.02935	0.0297937	-0.00044345	1.9665E-07
$z_{37}$	$Q_{4-5}$	0.14696	0.1328544	0.01410831	0.00019904
$z_{38}$	$Q_{4-7}$	-0.08971	0.0846433	-0.06099952	0.00372094
$z_{39}$	$Q_{6-11}$	0.03498	0.0196418	0.01533922	0.00023529
$z_{40}$	$Q_{6-12}$	0.02296	0.0171096	0.00585013	3.4224E-05
$z_{41}$	$Q_{7-8}$	-0.1643	-0.1585772	-0.00572175	3.2738E-05
$z_{42}$	$Q_{9-10}$	0.04647	0.0503712	-0.00389949	1.5206E-05
$z_{43}$	$Q_{9-14}$	0.03434	0.0387683	-0.00442369	1.9569E-05
$z_{44}$	$Q_{10-11}$	-0.01582	-0.0036017	-0.01221944	0.00014931
$z_{45}$	$Q_{12-13}$	0.008	0.00574	0.002264	5.1257E-06
$z_{46}$	$Q_{3-2}$	0.01531	0.0091014	0.00620771	3.8536E-05
$z_{47}$	$Q_{4-2}$	0.03165	0.0243861	0.00726027	5.2712E-05
$z_{48}$	$Q_{4-3}$	-0.055	-0.055373	0.00037065	1.3738E-07
$z_{49}$	$Q_{5-1}$	0.02471	0.0234039	0.00130301	1.6978E-06



$z_{50}$	$Q_{5-2}$	-0.01547	-0.0197247	0.00425453	1.8101E-05
$z_{51}$	$Q_{5-4}$	-0.13986	-0.1303341	-0.00952318	9.0691E-05
$z_{52}$	$Q_{6-5}$	-0.08094	-0.269096	0.188156	0.03540268
$z_{53}$	$Q_{8-7}$	0.15746	0.1627881	-0.00532519	2.8358E-05
$z_{54}$	$Q_{9-4}$	0.01693	-0.0557081	0.0726381	0.00527629
$z_{55}$	$Q_{9-7}$	-0.05307	-0.0827555	0.02968097	0.00088096
$z_{56}$	$Q_{10-9}$	-0.04188	-0.0498909	0.00801218	6.4195E-05
$z_{57}$	$Q_{11-6}$	-0.03129	-0.0187156	-0.01257225	0.00015806
$z_{58}$	$Q_{11-10}$	0.01681	0.003785	0.01302635	0.00016969
$z_{59}$	$Q_{13-12}$	-0.00723	-0.0056924	-0.00154172	2.3769E-06
$z_{60}$	$Q_{14-9}$	-0.03185	-0.0361605	0.00431439	1.8614E-05
$z_{61}$	$Q_{14-13}$	-0.01436	-0.0087648	-0.0055965	3.1321E-05
$z_{62}$	$P_2$	0.19398	0.17065775	0.02331831	0.00054374
$z_{63}$	$P_{11}$	-0.03556	-0.03549699	-6.2154E-05	3.8631E-09
$z_{64}$	$P_{14}$	-0.14455	-0.14123026	-0.00332136	1.1031E-05
$z_{65}$	$Q_2$	0.31803	0.31103573	0.00699328	4.8906E-05
$z_{66}$	$Q_{11}$	-0.01757	-0.0149306	-0.00264416	6.9916E-06
$z_{67}$	$Q_{14}$	-0.05133	-0.04492535	-0.00639975	4.0957E-05

A continuación se menciona el análisis de robustez numérica realizado al Jacobiano de mediciones  $H$  y a la matriz de ganancia  $G$ , obtenidas en la presente configuración.

Tabla 4.36 Robustez numérica del Jacobiano de mediciones  $H$  del sistema IEEE 14 (Caso Base).

Rango Numérico			
$rango(H)$		27	
Valores Singulares			
$\sigma_1(H)$	48.41366	$\sigma_{15}(H)$	9.652293
$\sigma_2(H)$	47.43376	$\sigma_{16}(H)$	8.434442
$\sigma_3(H)$	46.15417	$\sigma_{17}(H)$	8.267254
$\sigma_4(H)$	41.49887	$\sigma_{18}(H)$	7.444541
$\sigma_5(H)$	25.3269	$\sigma_{19}(H)$	6.820507
$\sigma_6(H)$	24.93186	$\sigma_{20}(H)$	6.684028
$\sigma_7(H)$	16.74526	$\sigma_{21}(H)$	5.943596
$\sigma_8(H)$	16.36314	$\sigma_{22}(H)$	5.793266
$\sigma_9(H)$	14.7664	$\sigma_{23}(H)$	3.952321
$\sigma_{10}(H)$	14.55123	$\sigma_{24}(H)$	3.48393
$\sigma_{11}(H)$	13.70311	$\sigma_{25}(H)$	2.850357
$\sigma_{12}(H)$	12.29857	$\sigma_{26}(H)$	1.822218
$\sigma_{13}(H)$	10.42209	$\sigma_{27}(H)$	0.4297087
$\sigma_{14}(H)$	9.922251		

Número de Condición	
$\kappa_2(H)$	112.6662

El rango del Jacobiano  $H$  debe ser 27, como se muestra en la tabla 4.36, debido a que es el número de variables de estado con las que cuenta el sistema IEEE 14. La distancia existente entre  $H$  y la matriz singular más cercana es igual al valor singular menor  $\sigma_{27} = 0.4297087$ , mientras que la distancia relativa resulta de la inversa del número de condición:

$$DR = \frac{1}{\kappa_2(H)} = 0.008875776$$

Al igual que en el Jacobiano de mediciones  $H$ , se realizó la descomposición en valores singulares para la matriz  $G$ . La tabla 4.37 muestra los resultados obtenidos.

Tabla 4.37 Robustez numérica de la matriz de ganancia  $G$  del sistema IEEE 14 (Caso Base).

Rango Numérico			
$rango(G)$		27	
Valores Singulares			
$\sigma_1(G)$	42596520	$\sigma_{15}(G)$	4486316
$\sigma_2(G)$	40861170	$\sigma_{16}(G)$	4326004
$\sigma_3(G)$	38523440	$\sigma_{17}(G)$	2182224
$\sigma_4(G)$	37451470	$\sigma_{18}(G)$	2057788
$\sigma_5(G)$	25741810	$\sigma_{19}(G)$	1888185
$\sigma_6(G)$	22494210	$\sigma_{20}(G)$	1771975
$\sigma_7(G)$	12338270	$\sigma_{21}(G)$	1718784
$\sigma_8(G)$	11857310	$\sigma_{22}(G)$	997522.9
$\sigma_9(G)$	9817750	$\sigma_{23}(G)$	722933.9
$\sigma_{10}(G)$	9213313	$\sigma_{24}(G)$	614589.3
$\sigma_{11}(G)$	4734359	$\sigma_{25}(G)$	324220.3
$\sigma_{12}(G)$	4623698	$\sigma_{26}(G)$	84246.92
$\sigma_{13}(G)$	4558309	$\sigma_{27}(G)$	3680.71
$\sigma_{14}(G)$	4505345		
Número de Condición			
$\kappa_2(G)$		11572.91	

De igual manera que el Jacobiano  $H$ , la matriz  $G$  tiene que ser de rango 27, y la distancia existente entre  $G$  y la matriz singular más cercana está dada por  $\sigma_{27} = 3680.71$ , mientras que la distancia relativa es:

$$DR = \frac{1}{\kappa_2(G)} = 0.0000864087$$

#### 4.4.2. CASO 2: ELIMINACIÓN DE FLUJOS EN LÍNEAS 5-2, 4-5 Y 9-14

El caso 2 del sistema IEEE 14 corresponde a la mostrada en la figura 4.12. Se eliminaron los medidores de flujos en las líneas 5-2, 4-5 y 9-14, por lo que cuenta con un total de 61 mediciones.

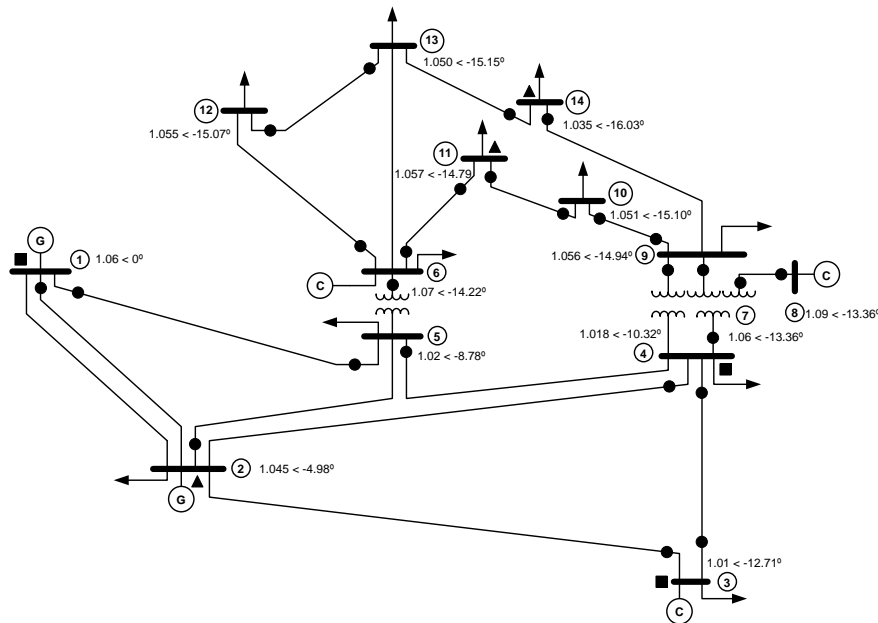


Fig. 4.12 Mediciones del sistema IEEE 14 (Caso 2).

La tabla 4.38 proporciona los datos del caso 2 del sistema IEEE 14,

Tabla 4.38 Valores de  $z$  real,  $z$  aleatoria y varianza del sistema IEEE 14 (Caso 2).

Medición	Variable	$z_i$ real	$z_i$ aleatoria	$\sigma_i^2$
$z_1$	$ V_1 $	1.06	1.06	0.00005242

$z_2$	$ V_3 $	1.01	1.01	0.0000477
$z_3$	$ V_4 $	1.01862	1.01862	0.0000485
$z_4$	$P_{1-2}$	1.56833	1.64096	0.00021006
$z_5$	$P_{1-5}$	0.75552	0.73755	0.00007037
$z_6$	$P_{2-5}$	0.41512	0.37531	0.00003563
$z_7$	$P_{3-4}$	-0.23332	-0.23281	0.00002528
$z_8$	$P_{4-7}$	0.28086	0.25942	0.00002796
$z_9$	$P_{6-11}$	0.07341	0.07273	0.00001605
$z_{10}$	$P_{6-12}$	0.07819	0.08426	0.00001644
$z_{11}$	$P_{7-8}$	0	0	0.00002047
$z_{12}$	$P_{9-10}$	0.05238	0.05009	0.0000152
$z_{13}$	$P_{10-11}$	-0.03774	-0.03859	0.00001401
$z_{14}$	$P_{12-13}$	0.0161	0.01556	0.00001282
$z_{15}$	$P_{3-2}$	-0.70867	-0.76398	0.00007329
$z_{16}$	$P_{4-2}$	-0.54461	-0.56263	0.00005221
$z_{17}$	$P_{4-3}$	0.23703	0.22976	0.00002536
$z_{18}$	$P_{5-1}$	-0.72788	-0.80021	0.00007752
$z_{19}$	$P_{5-4}$	0.61735	0.6402	0.00006202
$z_{20}$	$P_{6-5}$	-0.44063	-0.401	0.00003837
$z_{21}$	$P_{8-7}$	0	0	0.00002066
$z_{22}$	$P_{9-4}$	-0.16089	-0.16285	0.00002077
$z_{23}$	$P_{9-7}$	-0.28086	-0.27338	0.00002827
$z_{24}$	$P_{10-9}$	-0.05225	-0.04906	0.00001514
$z_{25}$	$P_{11-6}$	-0.07286	-0.07758	0.00001618
$z_{26}$	$P_{11-10}$	0.03786	0.03523	0.00001385
$z_{27}$	$P_{13-12}$	-0.01603	-0.01713	0.00001288
$z_{28}$	$P_{14-9}$	-0.09321	-0.09197	0.00001701
$z_{29}$	$P_{14-13}$	-0.05578	-0.05126	0.00001464
$z_{30}$	$Q_{1-2}$	-0.20392	-0.20728	0.00021006
$z_{31}$	$Q_{1-5}$	0.03503	0.03291	0.00007037
$z_{32}$	$Q_{2-5}$	0.00762	0.00725	0.00003563
$z_{33}$	$Q_{3-4}$	0.02809	0.02574	0.00002528
$z_{34}$	$Q_{4-7}$	-0.0942	-0.08568	0.00002796
$z_{35}$	$Q_{6-11}$	0.03472	0.03547	0.00001605
$z_{36}$	$Q_{6-12}$	0.02492	0.02604	0.00001644
$z_{37}$	$Q_{7-8}$	-0.16909	-0.15859	0.00002047
$z_{38}$	$Q_{9-10}$	0.04306	0.04101	0.0000152
$z_{39}$	$Q_{10-11}$	-0.01528	-0.01539	0.00001401
$z_{40}$	$Q_{12-13}$	0.00743	0.00685	0.00001282
$z_{41}$	$Q_{3-2}$	0.01584	0.01539	0.00007329
$z_{42}$	$Q_{4-2}$	0.03393	0.03662	0.00005221

$z_{43}$	$Q_{4-3}$	-0.05421	-0.0508	0.00002536
$z_{44}$	$Q_{5-1}$	0.0258	0.02671	0.00007752
$z_{45}$	$Q_{5-4}$	-0.1537	-0.16557	0.00006202
$z_{46}$	$Q_{6-5}$	-0.08394	-0.08113	0.00003837
$z_{47}$	$Q_{8-7}$	0.17356	0.16188	0.00002066
$z_{48}$	$Q_{9-4}$	0.01624	0.01648	0.00002077
$z_{49}$	$Q_{9-7}$	-0.04994	-0.04782	0.00002827
$z_{50}$	$Q_{10-9}$	-0.04271	-0.04046	0.00001514
$z_{51}$	$Q_{11-6}$	-0.03357	-0.03055	0.00001618
$z_{52}$	$Q_{11-10}$	0.01557	0.01501	0.00001385
$z_{53}$	$Q_{13-12}$	-0.00737	-0.00669	0.00001288
$z_{54}$	$Q_{14-9}$	-0.03417	-0.03563	0.00001701
$z_{55}$	$Q_{14-13}$	-0.01582	-0.01681	0.00001464
$z_{56}$	$P_2$	0.183	0.17943	0.0000697
$z_{57}$	$P_{11}$	-0.035	-0.03261	0.00003983
$z_{58}$	$P_{14}$	-0.149	-0.16088	0.00005157
$z_{59}$	$Q_2$	0.2969	0.29148	0.0000697
$z_{60}$	$Q_{11}$	-0.018	-0.01677	0.00003983
$z_{61}$	$Q_{14}$	-0.05	-0.04538	0.00005157

El vector de estimación de estado  $\hat{x}$  obtenido se muestra en la tabla 4.39, y requiere de 5 iteraciones para alcanzar su solución, así como un tiempo de cómputo de 0.1092007 segundos, para una tolerancia de  $1 \times 10^{-5}$ .

Tabla 4.39 Vector de estimación de estado del sistema IEEE 14 (Caso 2).

Variable de estado	Estudio de Flujos	Estudio de Estimación de Estado
$\theta_1$	0	0
$\theta_2$	-4.98094874	-5.08639198
$\theta_3$	-12.7179684	-12.9352315
$\theta_4$	-10.3242221	-10.5214088
$\theta_5$	-8.78257543	-8.9018412
$\theta_6$	-14.222653	-14.3265019
$\theta_7$	-13.3682477	-13.4920367
$\theta_8$	-13.3682477	-13.4920367
$\theta_9$	-14.9466008	-15.1537329
$\theta_{10}$	-15.1043243	-15.3127279
$\theta_{11}$	-14.7952639	-14.9756461
$\theta_{12}$	-15.0774235	-15.3414114
$\theta_{13}$	-15.1589389	-15.4413217

$\theta_{14}$	-16.0389343	-16.3687673
$ V_1 $	1.06	1.06441372
$ V_2 $	1.045	1.04845711
$ V_3 $	1.01	1.01271318
$ V_4 $	1.01862342	1.02170149
$ V_5 $	1.02026375	1.02451242
$ V_6 $	1.07	1.0266081
$ V_7 $	1.06195078	1.02858148
$ V_8 $	1.09	1.0556646
$ V_9 $	1.056346	1.01962278
$ V_{10} $	1.05132789	1.01408571
$ V_{11} $	1.05708185	1.01696663
$ V_{12} $	1.05522013	1.011893
$ V_{13} $	1.05044256	1.00773529
$ V_{14} $	1.03579477	0.99577556

Los residuos de las mediciones se enlistan en la tabla 4.40,

Tabla 4.40 Residuos de las mediciones del sistema IEEE 14 (Caso 2).

Medición	Variable	$z_i$ aleatoria	$h_i(\hat{x})$	$r_i = z_i - h_i(\hat{x})$	$r_i^2$
$z_1$	$ V_1 $	1.06	1.06441372	-0.00441372	1.9481E-05
$z_2$	$ V_3 $	1.01	1.01271318	-0.00271318	7.3613E-06
$z_3$	$ V_4 $	1.01862	1.02170149	-0.00308149	9.4956E-06
$z_4$	$P_{1-2}$	1.64096	1.6170268	0.02393083	0.00057268
$z_5$	$P_{1-5}$	0.73755	0.771688	-0.03414069	0.00116559
$z_6$	$P_{2-5}$	0.37531	0.4180066	-0.04269328	0.00182272
$z_7$	$P_{3-4}$	-0.23281	-0.2371418	0.00433456	1.8788E-05
$z_8$	$P_{4-7}$	0.25942	0.2662928	-0.00101401	1.0282E-06
$z_9$	$P_{6-11}$	0.07273	0.0679076	0.00482146	2.3247E-05
$z_{10}$	$P_{6-12}$	0.08426	0.0817391	0.0025215	6.358E-06
$z_{11}$	$P_{7-8}$	0	0	0	0
$z_{12}$	$P_{9-10}$	0.05009	0.0517868	-0.00169938	2.8879E-06
$z_{13}$	$P_{10-11}$	-0.03859	-0.0321752	-0.00641575	4.1162E-05
$z_{14}$	$P_{12-13}$	0.01556	0.0144799	0.00107966	1.1657E-06
$z_{15}$	$P_{3-2}$	-0.76398	-0.7231544	-0.04082261	0.00166649
$z_{16}$	$P_{4-2}$	-0.56263	-0.557031	-0.00559435	3.1297E-05
$z_{17}$	$P_{4-3}$	0.22976	0.2409489	-0.01118479	0.0001251
$z_{18}$	$P_{5-1}$	-0.80021	-0.7431038	-0.05711088	0.00326165
$z_{19}$	$P_{5-4}$	0.6402	0.6609458	-0.02075019	0.00043057
$z_{20}$	$P_{6-5}$	-0.401	-0.4233231	0.0223231	4.1813E-05

$z_{21}$	$P_{8-7}$	0	0	0	0
$z_{22}$	$P_{9-4}$	-0.16285	-0.1561088	-0.01157962	0.00013409
$z_{23}$	$P_{9-7}$	-0.27338	-0.2764485	0.00307012	9.4256E-06
$z_{24}$	$P_{10-9}$	-0.04906	-0.051636	0.00257352	6.623E-06
$z_{25}$	$P_{11-6}$	-0.07758	-0.0674639	-0.01012009	0.00010242
$z_{26}$	$P_{11-10}$	0.03523	0.0322579	0.00296948	8.8178E-06
$z_{27}$	$P_{13-12}$	-0.01713	-0.0144292	-0.00270228	7.3023E-06
$z_{28}$	$P_{14-9}$	-0.09197	-0.0987041	0.0067366	4.5382E-05
$z_{29}$	$P_{14-13}$	-0.05126	-0.0509922	-0.00027005	7.2927E-08
$z_{30}$	$Q_{1-2}$	-0.20728	-0.1982211	-0.00905966	8.2077E-05
$z_{31}$	$Q_{1-5}$	0.03291	0.0345052	-0.0015914	2.5325E-06
$z_{32}$	$Q_{2-5}$	0.00725	0.0024784	0.00477038	2.2757E-05
$z_{33}$	$Q_{3-4}$	0.02574	0.0273159	-0.00157976	2.4956E-06
$z_{34}$	$Q_{4-7}$	-0.08568	0.0873497	-0.05882063	0.00345987
$z_{35}$	$Q_{6-11}$	0.03547	0.0176729	0.01779571	0.00031669
$z_{36}$	$Q_{6-12}$	0.02604	0.0204177	0.00562035	3.1588E-05
$z_{37}$	$Q_{7-8}$	-0.15859	-0.1581448	-0.0004482	2.0088E-07
$z_{38}$	$Q_{9-10}$	0.04101	0.0473653	-0.00635982	4.0447E-05
$z_{39}$	$Q_{10-11}$	-0.01539	-0.0013728	-0.01402207	0.00019662
$z_{40}$	$Q_{12-13}$	0.00685	0.005052	0.00179352	3.2167E-06
$z_{41}$	$Q_{3-2}$	0.01539	0.0165844	-0.00119326	1.4239E-06
$z_{42}$	$Q_{4-2}$	0.03662	0.0363365	0.00028184	7.9434E-08
$z_{43}$	$Q_{4-3}$	-0.0508	-0.0534009	0.00260088	6.7646E-06
$z_{44}$	$Q_{5-1}$	0.02671	0.0298005	-0.00308678	9.5282E-06
$z_{45}$	$Q_{5-4}$	-0.16557	-0.1379368	-0.02763663	0.00076378
$z_{46}$	$Q_{6-5}$	-0.08113	-0.2759033	-0.10835443	0.01174068
$z_{47}$	$Q_{8-7}$	0.16188	0.1623088	-0.00042991	1.8482E-07
$z_{48}$	$Q_{9-4}$	0.01648	-0.0574187	0.01416983	0.00020078
$z_{49}$	$Q_{9-7}$	-0.04782	-0.0790242	0.03119999	0.00097344
$z_{50}$	$Q_{10-9}$	-0.04046	-0.0469649	0.00650382	4.23E-05
$z_{51}$	$Q_{11-6}$	-0.03055	-0.0167437	-0.01380287	0.00019052
$z_{52}$	$Q_{11-10}$	0.01501	0.0015665	0.01344737	0.00018083
$z_{53}$	$Q_{13-12}$	-0.00669	-0.0050061	-0.00168034	2.8235E-06
$z_{54}$	$Q_{14-9}$	-0.03563	-0.0405796	0.00495434	2.4545E-05
$z_{55}$	$Q_{14-13}$	-0.01681	-0.0087974	-0.0080156	6.425E-05
$z_{56}$	$P_2$	0.17943	0.1678532	0.01157539	0.00013399
$z_{57}$	$P_{11}$	-0.03261	-0.03520599	0.00259465	6.7322E-06
$z_{58}$	$P_{14}$	-0.16088	-0.14969625	-0.01118332	0.00012507
$z_{59}$	$Q_2$	0.29148	0.29445025	-0.00296712	8.8038E-06
$z_{60}$	$Q_{11}$	-0.01677	-0.01517719	-0.00158932	2.5259E-06
$z_{61}$	$Q_{14}$	-0.04538	-0.049377	0.00399623	1.597E-05

Los resultados del análisis numérico realizado al Jacobiano de mediciones  $H$  se presentan en la tabla 4.41.

Tabla 4.41 Robustez numérica del Jacobiano de mediciones  $H$  del sistema IEEE 14 (Caso 2).

<b>Rango Numérico</b>			
$\text{rango}(H)$		27	
<b>Valores Singulares</b>			
$\sigma_1(H)$	46.04274	$\sigma_{15}(H)$	9.141179
$\sigma_2(H)$	41.29099	$\sigma_{16}(H)$	8.443523
$\sigma_3(H)$	35.34193	$\sigma_{17}(H)$	8.277572
$\sigma_4(H)$	34.2567	$\sigma_{18}(H)$	7.393963
$\sigma_5(H)$	25.36763	$\sigma_{19}(H)$	6.721086
$\sigma_6(H)$	24.87678	$\sigma_{20}(H)$	6.549683
$\sigma_7(H)$	16.79921	$\sigma_{21}(H)$	5.859823
$\sigma_8(H)$	16.35723	$\sigma_{22}(H)$	5.704581
$\sigma_9(H)$	14.82443	$\sigma_{23}(H)$	3.904269
$\sigma_{10}(H)$	14.4584	$\sigma_{24}(H)$	3.326612
$\sigma_{11}(H)$	13.30142	$\sigma_{25}(H)$	2.694471
$\sigma_{12}(H)$	12.06557	$\sigma_{26}(H)$	1.784563
$\sigma_{13}(H)$	10.39997	$\sigma_{27}(H)$	0.4288005
$\sigma_{14}(H)$	9.464638		
<b>Número de Condición</b>			
$\kappa_2(H)$		107.3757	

La distancia existente entre  $H$  y la matriz singular más cercana es  $\sigma_{27} = 0.4288005$ , y la distancia relativa resultante es:

$$DR = \frac{1}{\kappa_2(H)} = 0.009313094$$

Los resultados de la descomposición en valores singulares para la matriz  $G$  se muestran en la tabla 4.42.

Tabla 4.42 Robustez numérica de la matriz de ganancia  $G$  del sistema IEEE 14 (Caso 2).

<b>Rango Numérico</b>	
$\text{rango}(G)$	27



<b>Valores Singulares</b>			
$\sigma_1(G)$	39361000	$\sigma_{15}(G)$	4063599
$\sigma_2(G)$	37975020	$\sigma_{16}(G)$	3856155
$\sigma_3(G)$	26026200	$\sigma_{17}(G)$	1876097
$\sigma_4(G)$	22443440	$\sigma_{18}(G)$	1789336
$\sigma_5(G)$	21700410	$\sigma_{19}(G)$	1713846
$\sigma_6(G)$	20431330	$\sigma_{20}(G)$	1674463
$\sigma_7(G)$	12381300	$\sigma_{21}(G)$	1608417
$\sigma_8(G)$	11820270	$\sigma_{22}(G)$	986320
$\sigma_9(G)$	9920578	$\sigma_{23}(G)$	670908.7
$\sigma_{10}(G)$	9246243	$\sigma_{24}(G)$	541508.6
$\sigma_{11}(G)$	4605029	$\sigma_{25}(G)$	311475.2
$\sigma_{12}(G)$	4512953	$\sigma_{26}(G)$	78252.85
$\sigma_{13}(G)$	4453773	$\sigma_{27}(G)$	3655.917
$\sigma_{14}(G)$	4352243		
<b>Número de Condición</b>			
$\kappa_2(G)$	10766.38		

La distancia entre  $G$  y la matriz singular más cercana está dada por  $\sigma_{27} = 3655.917$ , mientras que la distancia relativa es:

$$DR = \frac{1}{\kappa_2(G)} = 0.00009288173$$

### 4.4.3. CASO 3: ELIMINACIÓN DE 3 MEDIDORES DE FLUJOS Y UNO DE VOLTAJE

En esta configuración se eliminaron los medidores de flujo de las líneas 5-2, 4-5 y 9-14, además de la medición de voltaje en el nodo 3, con la intención de analizar que sucede con la robustez de la matriz de la matriz de ganancia. Se cuenta con un total de 60 mediciones.

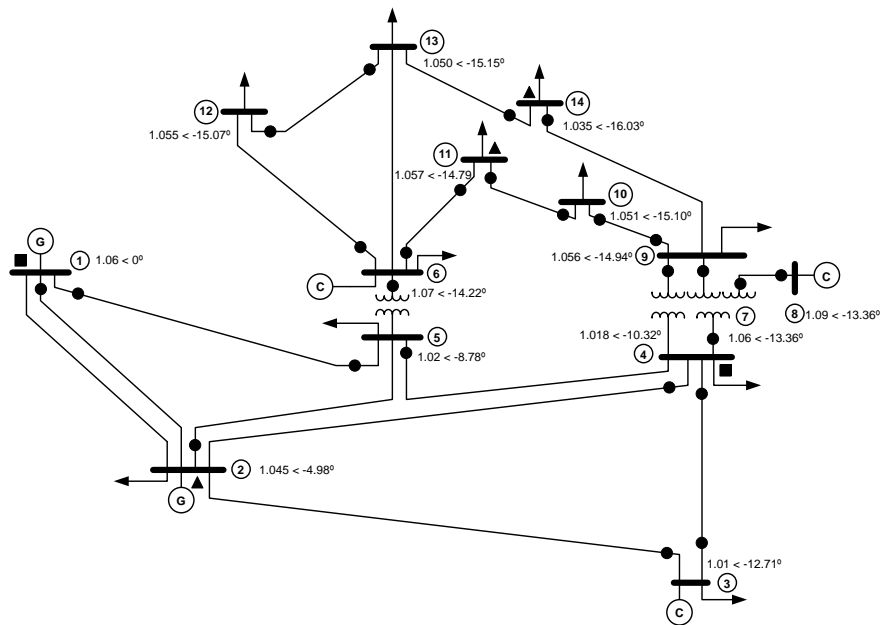


Fig. 4.13 Mediciones del sistema IEEE 14 (Caso 3).

La tabla 4.43 proporciona los datos del caso 3 del sistema IEEE 14,

Tabla 4.43 Valores de  $z$  real,  $z$  aleatoria y varianza del sistema IEEE 14 (Caso 3).

Medición	Variable	$z_i$ real	$z_i$ aleatoria	$\sigma_i^2$
$z_1$	$ V_1 $	1.06	1.06	0.00005242
$z_2$	$ V_4 $	1.01862	1.01862	0.0000485
$z_3$	$P_{1-2}$	1.56833	1.64096	0.00021006
$z_4$	$P_{1-5}$	0.75552	0.73755	0.00007037
$z_5$	$P_{2-5}$	0.41512	0.37531	0.00003563
$z_6$	$P_{3-4}$	-0.23332	-0.23281	0.00002528
$z_7$	$P_{4-7}$	0.28086	0.25942	0.00002796
$z_8$	$P_{6-11}$	0.07341	0.07273	0.00001605
$z_9$	$P_{6-12}$	0.07819	0.08426	0.00001644

$z_{10}$	$P_{7-8}$	0	0	0.00002047
$z_{11}$	$P_{9-10}$	0.05238	0.05009	0.0000152
$z_{12}$	$P_{10-11}$	-0.03774	-0.03859	0.00001401
$z_{13}$	$P_{12-13}$	0.0161	0.01556	0.00001282
$z_{14}$	$P_{3-2}$	-0.70867	-0.76398	0.00007329
$z_{15}$	$P_{4-2}$	-0.54461	-0.56263	0.00005221
$z_{16}$	$P_{4-3}$	0.23703	0.22976	0.00002536
$z_{17}$	$P_{5-1}$	-0.72788	-0.80021	0.00007752
$z_{18}$	$P_{5-4}$	0.61735	0.6402	0.00006202
$z_{19}$	$P_{6-5}$	-0.44063	-0.401	0.00003837
$z_{20}$	$P_{8-7}$	0	0	0.00002066
$z_{21}$	$P_{9-4}$	-0.16089	-0.16285	0.00002077
$z_{22}$	$P_{9-7}$	-0.28086	-0.27338	0.00002827
$z_{23}$	$P_{10-9}$	-0.05225	-0.04906	0.00001514
$z_{24}$	$P_{11-6}$	-0.07286	-0.07758	0.00001618
$z_{25}$	$P_{11-10}$	0.03786	0.03523	0.00001385
$z_{26}$	$P_{13-12}$	-0.01603	-0.01713	0.00001288
$z_{27}$	$P_{14-9}$	-0.09321	-0.09197	0.00001701
$z_{28}$	$P_{14-13}$	-0.05578	-0.05126	0.00001464
$z_{29}$	$Q_{1-2}$	-0.20392	-0.20728	0.00021006
$z_{30}$	$Q_{1-5}$	0.03503	0.03291	0.00007037
$z_{31}$	$Q_{2-5}$	0.00762	0.00725	0.00003563
$z_{32}$	$Q_{3-4}$	0.02809	0.02574	0.00002528
$z_{33}$	$Q_{4-7}$	-0.0942	-0.08568	0.00002796
$z_{34}$	$Q_{6-11}$	0.03472	0.03547	0.00001605
$z_{35}$	$Q_{6-12}$	0.02492	0.02604	0.00001644
$z_{36}$	$Q_{7-8}$	-0.16909	-0.15859	0.00002047
$z_{37}$	$Q_{9-10}$	0.04306	0.04101	0.0000152
$z_{38}$	$Q_{10-11}$	-0.01528	-0.01539	0.00001401
$z_{39}$	$Q_{12-13}$	0.00743	0.00685	0.00001282
$z_{40}$	$Q_{3-2}$	0.01584	0.01539	0.00007329
$z_{41}$	$Q_{4-2}$	0.03393	0.03662	0.00005221
$z_{42}$	$Q_{4-3}$	-0.05421	-0.0508	0.00002536
$z_{43}$	$Q_{5-1}$	0.0258	0.02671	0.00007752
$z_{44}$	$Q_{5-4}$	-0.1537	-0.16557	0.00006202
$z_{45}$	$Q_{6-5}$	-0.08394	-0.08113	0.00003837
$z_{46}$	$Q_{8-7}$	0.17356	0.16188	0.00002066
$z_{47}$	$Q_{9-4}$	0.01624	0.01648	0.00002077
$z_{48}$	$Q_{9-7}$	-0.04994	-0.04782	0.00002827
$z_{49}$	$Q_{10-9}$	-0.04271	-0.04046	0.00001514
$z_{50}$	$Q_{11-6}$	-0.03357	-0.03055	0.00001618

$z_{51}$	$Q_{11-10}$	0.01557	0.01501	0.00001385
$z_{52}$	$Q_{13-12}$	-0.00737	-0.00669	0.00001288
$z_{53}$	$Q_{14-9}$	-0.03417	-0.03563	0.00001701
$z_{54}$	$Q_{14-13}$	-0.01582	-0.01681	0.00001464
$z_{55}$	$P_2$	0.183	0.17943	0.0000697
$z_{56}$	$P_{11}$	-0.035	-0.03261	0.00003983
$z_{57}$	$P_{14}$	-0.149	-0.16088	0.00005157
$z_{58}$	$Q_2$	0.2969	0.29148	0.0000697
$z_{59}$	$Q_{11}$	-0.018	-0.01677	0.00003983
$z_{60}$	$Q_{14}$	-0.05	-0.04538	0.00005157

El vector de estimación de estado  $\hat{x}$  obtenido, se muestra en la tabla 4.44 y requiere de 5 iteraciones para alcanzar su solución, así como un tiempo de cómputo de 0.1248008 segundos, para una tolerancia de  $1 \times 10^{-5}$ .

Tabla 4.44 Vector de estimación de estado del sistema IEEE 14 (Caso 3).

Variable de estado	Estudio de Flujos	Estudio de Estimación de Estado
$\theta_1$	0	0
$\theta_2$	-4.98094874	-5.07383054
$\theta_3$	-12.7179684	-12.9016436
$\theta_4$	-10.3242221	-10.4944273
$\theta_5$	-8.78257543	-8.87921472
$\theta_6$	-14.222653	-14.2894153
$\theta_7$	-13.3682477	-13.4571526
$\theta_8$	-13.3682477	-13.4571526
$\theta_9$	-14.9466008	-15.1143345
$\theta_{10}$	-15.1043243	-15.2728961
$\theta_{11}$	-14.7952639	-14.9367643
$\theta_{12}$	-15.0774235	-15.3015292
$\theta_{13}$	-15.1589389	-15.4011569
$\theta_{14}$	-16.0389343	-16.3259644
$ V_1 $	1.06	1.06573418
$ V_2 $	1.045	1.04982321
$ V_3 $	1.01	1.01413954
$ V_4 $	1.01862342	1.02309372
$ V_5 $	1.02026375	1.02589919
$ V_6 $	1.07	1.02799832
$ V_7 $	1.06195078	1.02996484
$ V_8 $	1.09	1.05701254

$ V_9 $	1.056346	1.02102074
$ V_{10} $	1.05132789	1.01549144
$ V_{11} $	1.05708185	1.01836917
$ V_{12} $	1.05522013	1.01330275
$ V_{13} $	1.05044256	1.00915085
$ V_{14} $	1.03579477	0.99720856

Los residuos de las mediciones se enlistan en la tabla 4.45,

Tabla 4.45 Residuos de las mediciones del sistema IEEE 14 (Caso 3).

Medición	Variable	$z_i$ aleatoria	$h_i(\hat{x})$	$r_i = z_i - h_i(\hat{x})$	$r_i^2$
$z_1$	$ V_1 $	1.06	1.06573418	-0.00573418	3.2881E-05
$z_2$	$ V_4 $	1.01862	1.02309372	-0.00447372	2.0014E-05
$z_3$	$P_{1-2}$	1.64096	1.6169506	0.024007	0.00057634
$z_4$	$P_{1-5}$	0.73755	0.7716846	-0.03413729	0.00116535
$z_5$	$P_{2-5}$	0.37531	0.4180211	-0.04270777	0.00182395
$z_6$	$P_{3-4}$	-0.23281	-0.2371102	0.00430288	1.8515E-05
$z_7$	$P_{4-7}$	0.25942	0.2663046	-0.00102556	1.0518E-06
$z_8$	$P_{6-11}$	0.07273	0.0679069	0.00482221	2.3254E-05
$z_9$	$P_{6-12}$	0.08426	0.0817383	0.00252234	6.3622E-06
$z_{10}$	$P_{7-8}$	0	0	0	0
$z_{11}$	$P_{9-10}$	0.05009	0.0517867	-0.00169933	2.8877E-06
$z_{12}$	$P_{10-11}$	-0.03859	-0.0321752	-0.0064157	4.1161E-05
$z_{13}$	$P_{12-13}$	0.01556	0.0144797	0.00107987	1.1661E-06
$z_{14}$	$P_{3-2}$	-0.76398	-0.7232031	-0.04077389	0.00166251
$z_{15}$	$P_{4-2}$	-0.56263	-0.557078	-0.00554734	3.0773E-05
$z_{16}$	$P_{4-3}$	0.22976	0.2409061	-0.01114201	0.00012414
$z_{17}$	$P_{5-1}$	-0.80021	-0.7431728	-0.0570419	0.00325378
$z_{18}$	$P_{5-4}$	0.6402	0.6609409	-0.02074528	0.00043037
$z_{19}$	$P_{6-5}$	-0.401	-0.423342	-0.00644865	4.1585E-05
$z_{20}$	$P_{8-7}$	0	0	0	0
$z_{21}$	$P_{9-4}$	-0.16285	-0.1561172	-0.01157151	0.0001339
$z_{22}$	$P_{9-7}$	-0.27338	-0.2764469	0.0030686	9.4163E-06
$z_{23}$	$P_{10-9}$	-0.04906	-0.0516364	0.00257389	6.6249E-06
$z_{24}$	$P_{11-6}$	-0.07758	-0.0674644	-0.01011963	0.00010241
$z_{25}$	$P_{11-10}$	0.03523	0.0322577	0.00296965	8.8188E-06
$z_{26}$	$P_{13-12}$	-0.01713	-0.0144291	-0.00270235	7.3027E-06
$z_{27}$	$P_{14-9}$	-0.09197	-0.098704	0.00673657	4.5381E-05
$z_{28}$	$P_{14-13}$	-0.05126	-0.0509921	-0.00027016	7.2986E-08
$z_{29}$	$Q_{1-2}$	-0.20728	-0.1989144	-0.00836636	6.9996E-05

$z_{30}$	$Q_{1-5}$	0.03291	0.0342099	-0.00129608	1.6798E-06
$z_{31}$	$Q_{2-5}$	0.00725	0.0024522	0.00479648	2.3006E-05
$z_{32}$	$Q_{3-4}$	0.02574	0.0273664	-0.00163022	2.6576E-06
$z_{33}$	$Q_{4-7}$	-0.08568	0.0876423	-0.0588006	0.00345751
$z_{34}$	$Q_{6-11}$	0.03547	0.0176761	0.01779258	0.00031658
$z_{35}$	$Q_{6-12}$	0.02604	0.0204178	0.00562023	3.1587E-05
$z_{36}$	$Q_{7-8}$	-0.15859	-0.1581503	-0.00044261	1.9591E-07
$z_{37}$	$Q_{9-10}$	0.04101	0.0473629	-0.00635742	4.0417E-05
$z_{38}$	$Q_{10-11}$	-0.01539	-0.0013773	-0.01401757	0.00019649
$z_{39}$	$Q_{12-13}$	0.00685	0.0050521	0.00179342	3.2164E-06
$z_{40}$	$Q_{3-2}$	0.01539	0.0164511	-0.0010599	1.1234E-06
$z_{41}$	$Q_{4-2}$	0.03662	0.0361669	0.00045134	2.0371E-07
$z_{42}$	$Q_{4-3}$	-0.0508	-0.053579	0.00277891	7.7224E-06
$z_{43}$	$Q_{5-1}$	0.02671	0.0296579	-0.00294418	8.6682E-06
$z_{44}$	$Q_{5-4}$	-0.16557	-0.1380204	-0.02755301	0.00075917
$z_{45}$	$Q_{6-5}$	-0.08113	-0.2767554	-0.10833099	0.0117356
$z_{46}$	$Q_{8-7}$	0.16188	0.1623035	-0.00042461	1.8029E-07
$z_{47}$	$Q_{9-4}$	0.01648	-0.057594	0.01418065	0.00020109
$z_{48}$	$Q_{9-7}$	-0.04782	-0.0790135	0.03118926	0.00097277
$z_{49}$	$Q_{10-9}$	-0.04046	-0.0469636	0.00650253	4.2283E-05
$z_{50}$	$Q_{11-6}$	-0.03055	-0.0167494	-0.01379723	0.00019036
$z_{51}$	$Q_{11-10}$	0.01501	0.0015705	0.01344341	0.00018073
$z_{52}$	$Q_{13-12}$	-0.00669	-0.0050063	-0.00168011	2.8228E-06
$z_{53}$	$Q_{14-9}$	-0.03563	-0.0405791	0.00495385	2.4541E-05
$z_{54}$	$Q_{14-13}$	-0.01681	-0.0087978	-0.0080152	6.4243E-05
$z_{55}$	$P_2$	0.17943	0.16781714	0.01161144	0.00013483
$z_{56}$	$P_{11}$	-0.03261	-0.03520662	0.00259528	6.7355E-06
$z_{57}$	$P_{14}$	-0.16088	-0.14969611	-0.01118346	0.00012507
$z_{58}$	$Q_2$	0.29148	0.29428425	-0.00280112	7.8463E-06
$z_{59}$	$Q_{11}$	-0.01677	-0.01517887	-0.00158764	2.5206E-06
$z_{60}$	$Q_{14}$	-0.04538	-0.04937691	0.00399615	1.5969E-05

Los resultados del análisis numérico realizado al Jacobiano de mediciones  $H$  se presentan en la tabla 4.46.

Tabla 4.46 Robustez numérica del Jacobiano de mediciones  $H$  del sistema IEEE 14 (Caso 3).

Rango Numérico			
$rango(H)$		27	
Valores Singulares			
$\sigma_1(H)$	46.1023	$\sigma_{15}(H)$	9.155673

$\sigma_2(H)$	41.39788	$\sigma_{16}(H)$	8.465475
$\sigma_3(H)$	35.42991	$\sigma_{17}(H)$	8.290263
$\sigma_4(H)$	34.3106	$\sigma_{18}(H)$	7.409672
$\sigma_5(H)$	25.43678	$\sigma_{19}(H)$	6.738473
$\sigma_6(H)$	24.9119	$\sigma_{20}(H)$	6.559547
$\sigma_7(H)$	16.84453	$\sigma_{21}(H)$	5.873165
$\sigma_8(H)$	16.38021	$\sigma_{22}(H)$	5.71499
$\sigma_9(H)$	14.86412	$\sigma_{23}(H)$	3.897673
$\sigma_{10}(H)$	14.47781	$\sigma_{24}(H)$	3.334996
$\sigma_{11}(H)$	13.31825	$\sigma_{25}(H)$	2.686475
$\sigma_{12}(H)$	12.0942	$\sigma_{26}(H)$	1.788355
$\sigma_{13}(H)$	10.38444	$\sigma_{27}(H)$	0.3566679
$\sigma_{14}(H)$	9.488954		
<b>Número de Condición</b>			
$\kappa_2(H)$			129.2583

La distancia existente entre  $H$  y la matriz singular más cercana es  $\sigma_{27} = 0.3566679$ , y la distancia relativa resultante es:

$$DR = \frac{1}{\kappa_2(H)} = 0.007736447$$

Los resultados de la descomposición en valores singulares para la matriz  $G$  se muestran en la tabla 4.47.

Tabla 4.47 Robustez numérica de la matriz de ganancia  $G$  del sistema IEEE 14 (Caso 3).

<b>Rango Numérico</b>			
$rango(G)$		27	
<b>Valores Singulares</b>			
$\sigma_1(G)$	39577640	$\sigma_{15}(G)$	4084838
$\sigma_2(G)$	38080790	$\sigma_{16}(G)$	3867510
$\sigma_3(G)$	26094850	$\sigma_{17}(G)$	1885810
$\sigma_4(G)$	22559530	$\sigma_{18}(G)$	1793001
$\sigma_5(G)$	21808930	$\sigma_{19}(G)$	1721741
$\sigma_6(G)$	20495580	$\sigma_{20}(G)$	1674667
$\sigma_7(G)$	12448740	$\sigma_{21}(G)$	1613644
$\sigma_8(G)$	11853210	$\sigma_{22}(G)$	991127.3
$\sigma_9(G)$	9973671	$\sigma_{23}(G)$	672446.1

$\sigma_{10}(G)$	9271060	$\sigma_{24}(G)$	544203.7
$\sigma_{11}(G)$	4630252	$\sigma_{25}(G)$	310129
$\sigma_{12}(G)$	4525973	$\sigma_{26}(G)$	78489.13
$\sigma_{13}(G)$	4475515	$\sigma_{27}(G)$	2426.543
$\sigma_{14}(G)$	4358018		
<b>Número de Condición</b>			
$\kappa_2(G)$	16310.3		

La distancia entre  $G$  y la matriz singular más cercana está dada por  $\sigma_{27} = 2426.543$ , mientras que la distancia relativa es:

$$DR = \frac{1}{\kappa_2(G)} = 0.00006131095$$

#### 4.4.4. CASO 4: ELIMINACIÓN 3 MEDIDORES DE FLUJOS Y 2 DE INYECCIONES

El caso 4 del sistema IEEE 14 se muestra en la figura 4.14. Nuevamente se eliminaron los medidores de flujo de las líneas 5-2, 4-5 y 9-14, además de los medidores de inyección de potencia en los nodos 11 y 14, por lo que cuenta con 26 medidores de flujo, 3 de voltaje y 1 de inyección, proporcionando un total de 57 mediciones.

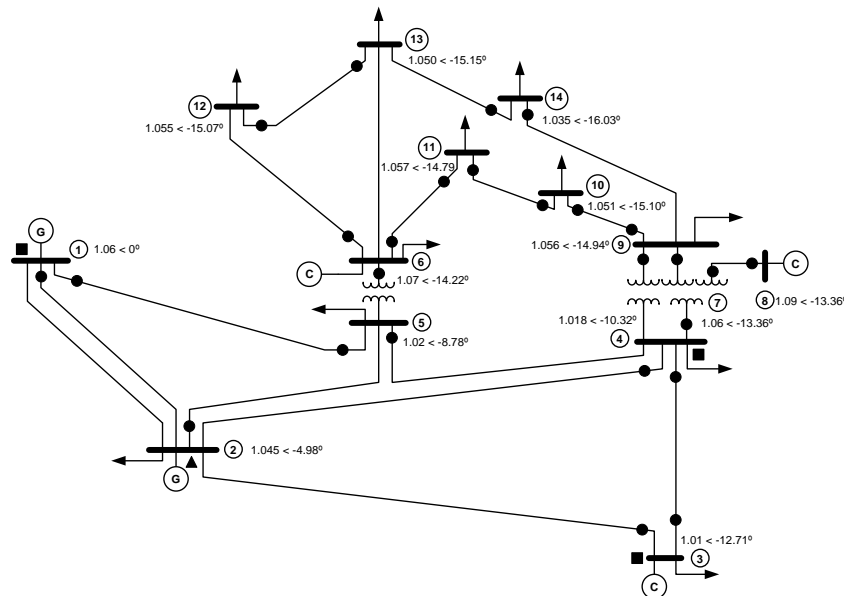


Fig. 4.14 Mediciones del sistema IEEE 14 (Caso 4).



La tabla 4.48 proporciona los datos del caso 4 del sistema IEEE 14,

Tabla 4.48 Valores de  $z$  real,  $z$  aleatoria y varianza del sistema IEEE 14 (Caso 4).

Medición	Variable	$z_i$ real	$z_i$ aleatoria	$\sigma_i^2$
$z_1$	$ V_1 $	1.06	1.06	0.00005242
$z_2$	$ V_3 $	1.01	1.01	0.0000477
$z_3$	$ V_4 $	1.01862	1.01862	0.0000485
$z_4$	$P_{1-2}$	1.56833	1.64096	0.00021006
$z_5$	$P_{1-5}$	0.75552	0.73755	0.00007037
$z_6$	$P_{2-5}$	0.41512	0.37531	0.00003563
$z_7$	$P_{3-4}$	-0.23332	-0.23281	0.00002528
$z_8$	$P_{4-7}$	0.28086	0.25942	0.00002796
$z_9$	$P_{6-11}$	0.07341	0.07273	0.00001605
$z_{10}$	$P_{6-12}$	0.07819	0.08426	0.00001644
$z_{11}$	$P_{7-8}$	0	0	0.00002047
$z_{12}$	$P_{9-10}$	0.05238	0.05009	0.0000152
$z_{13}$	$P_{10-11}$	-0.03774	-0.03859	0.00001401
$z_{14}$	$P_{12-13}$	0.0161	0.01556	0.00001282
$z_{15}$	$P_{3-2}$	-0.70867	-0.76398	0.00007329
$z_{16}$	$P_{4-2}$	-0.54461	-0.56263	0.00005221
$z_{17}$	$P_{4-3}$	0.23703	0.22976	0.00002536
$z_{18}$	$P_{5-1}$	-0.72788	-0.80021	0.00007752
$z_{19}$	$P_{5-4}$	0.61735	0.6402	0.00006202
$z_{20}$	$P_{6-5}$	-0.44063	-0.401	0.00003837
$z_{21}$	$P_{8-7}$	0	0	0.00002066
$z_{22}$	$P_{9-4}$	-0.16089	-0.16285	0.00002077
$z_{23}$	$P_{9-7}$	-0.28086	-0.27338	0.00002827
$z_{24}$	$P_{10-9}$	-0.05225	-0.04906	0.00001514
$z_{25}$	$P_{11-6}$	-0.07286	-0.07758	0.00001618
$z_{26}$	$P_{11-10}$	0.03786	0.03523	0.00001385
$z_{27}$	$P_{13-12}$	-0.01603	-0.01713	0.00001288
$z_{28}$	$P_{14-9}$	-0.09321	-0.09197	0.00001701
$z_{29}$	$P_{14-13}$	-0.05578	-0.05126	0.00001464
$z_{30}$	$Q_{1-2}$	-0.20392	-0.20728	0.00021006
$z_{31}$	$Q_{1-5}$	0.03503	0.03291	0.00007037
$z_{32}$	$Q_{2-5}$	0.00762	0.00725	0.00003563
$z_{33}$	$Q_{3-4}$	0.02809	0.02574	0.00002528
$z_{34}$	$Q_{4-7}$	-0.0942	-0.08568	0.00002796
$z_{35}$	$Q_{6-11}$	0.03472	0.03547	0.00001605
$z_{36}$	$Q_{6-12}$	0.02492	0.02604	0.00001644
$z_{37}$	$Q_{7-8}$	-0.16909	-0.15859	0.00002047

$z_{38}$	$Q_{9-10}$	0.04306	0.04101	0.0000152
$z_{39}$	$Q_{10-11}$	-0.01528	-0.01539	0.00001401
$z_{40}$	$Q_{12-13}$	0.00743	0.00685	0.00001282
$z_{41}$	$Q_{3-2}$	0.01584	0.01539	0.00007329
$z_{42}$	$Q_{4-2}$	0.03393	0.03662	0.00005221
$z_{43}$	$Q_{4-3}$	-0.05421	-0.0508	0.00002536
$z_{44}$	$Q_{5-1}$	0.0258	0.02671	0.00007752
$z_{45}$	$Q_{5-4}$	-0.1537	-0.16557	0.00006202
$z_{46}$	$Q_{6-5}$	-0.08394	-0.08113	0.00003837
$z_{47}$	$Q_{8-7}$	0.17356	0.16188	0.00002066
$z_{48}$	$Q_{9-4}$	0.01624	0.01648	0.00002077
$z_{49}$	$Q_{9-7}$	-0.04994	-0.04782	0.00002827
$z_{50}$	$Q_{10-9}$	-0.04271	-0.04046	0.00001514
$z_{51}$	$Q_{11-6}$	-0.03357	-0.03055	0.00001618
$z_{52}$	$Q_{11-10}$	0.01557	0.01501	0.00001385
$z_{53}$	$Q_{13-12}$	-0.00737	-0.00669	0.00001288
$z_{54}$	$Q_{14-9}$	-0.03417	-0.03563	0.00001701
$z_{55}$	$Q_{14-13}$	-0.01582	-0.01681	0.00001464
$z_{56}$	$P_2$	0.183	0.17943	0.00006832
$z_{57}$	$Q_2$	0.2969	0.27677	0.00006832

El vector de estimación de estado  $\hat{x}$  obtenido se muestra en la tabla 4.49, requiere de 5 iteraciones para alcanzar su solución, y un tiempo de cómputo de 0.1092007 segundos, para una tolerancia de  $1 \times 10^{-5}$ .

Tabla 4.49 Vector de estimación de estado del sistema IEEE 14 (Caso 4).

Variable de estado	Estudio de Flujos	Estudio de Estimación de Estado
$\theta_1$	0	0
$\theta_2$	-4.98094874	-5.0744978
$\theta_3$	-12.7179684	-12.9222028
$\theta_4$	-10.3242221	-10.5106079
$\theta_5$	-8.78257543	-8.89239371
$\theta_6$	-14.222653	-14.3129091
$\theta_7$	-13.3682477	-13.4791805
$\theta_8$	-13.3682477	-13.4791805
$\theta_9$	-14.9466008	-15.1396775
$\theta_{10}$	-15.1043243	-15.2986479
$\theta_{11}$	-14.7952639	-14.9683881
$\theta_{12}$	-15.0774235	-15.3289074

$\theta_{13}$	-15.1589389	-15.4295656
$\theta_{14}$	-16.0389343	-16.2855566
$ V_1 $	1.06	1.06484074
$ V_2 $	1.045	1.04851709
$ V_3 $	1.01	1.01311857
$ V_4 $	1.01862342	1.02208038
$ V_5 $	1.02026375	1.02488434
$ V_6 $	1.07	1.02698334
$ V_7 $	1.06195078	1.0289572
$ V_8 $	1.09	1.0560307
$ V_9 $	1.056346	1.02000226
$ V_{10} $	1.05132789	1.01446697
$ V_{11} $	1.05708185	1.01736126
$ V_{12} $	1.05522013	1.01226747
$ V_{13} $	1.05044256	1.00810865
$ V_{14} $	1.03579477	0.99631319

Los residuos de las mediciones se enlistan en la tabla 4.50,

Tabla 4.50 Residuos de las mediciones del sistema IEEE 14 (Caso 4).

Medición	Variable	$z_i$ aleatoria	$h_i(\hat{x})$	$r_i = z_i - h_i(\hat{x})$	$r_i^2$
$z_1$	$ V_1 $	1.06	1.06484074	-0.00484074	2.3433E-05
$z_2$	$ V_3 $	1.01	1.01311857	-0.00311857	9.7255E-06
$z_3$	$ V_4 $	1.01862	1.02208038	-0.00346038	1.1974E-05
$z_4$	$P_{1-2}$	1.64096	1.6160907	0.02486692	0.00061836
$z_5$	$P_{1-5}$	0.73755	0.7715407	-0.03399343	0.00115555
$z_6$	$P_{2-5}$	0.37531	0.4178534	-0.04254005	0.00180966
$z_7$	$P_{3-4}$	-0.23281	-0.2370642	0.00425689	1.8121E-05
$z_8$	$P_{4-7}$	0.25942	0.2663046	-0.00102559	1.0518E-06
$z_9$	$P_{6-11}$	0.07273	0.0683879	0.00434124	1.8846E-05
$z_{10}$	$P_{6-12}$	0.08426	0.0818552	0.00240542	5.7861E-06
$z_{11}$	$P_{7-8}$	0	0	0	0
$z_{12}$	$P_{9-10}$	0.05009	0.0518055	-0.00171815	2.952E-06
$z_{13}$	$P_{10-11}$	-0.03859	-0.0316834	-0.0069075	4.7714E-05
$z_{14}$	$P_{12-13}$	0.01556	0.0145196	0.00103994	1.0815E-06
$z_{15}$	$P_{3-2}$	-0.76398	-0.7229894	-0.04098767	0.00167999
$z_{16}$	$P_{4-2}$	-0.56263	-0.5568181	-0.00580722	3.3724E-05
$z_{17}$	$P_{4-3}$	0.22976	0.2408663	-0.01110226	0.00012326
$z_{18}$	$P_{5-1}$	-0.80021	-0.7429885	-0.05722615	0.00327483
$z_{19}$	$P_{5-4}$	0.6402	0.6608362	-0.02064067	0.00042604

$z_{20}$	$P_{6-5}$	-0.401	-0.4233088	-0.00647961	4.1985E-05
$z_{21}$	$P_{8-7}$	0	0	0	0
$z_{22}$	$P_{9-4}$	-0.16285	-0.1561153	-0.01157333	0.00013394
$z_{23}$	$P_{9-7}$	-0.27338	-0.2764528	0.00307443	9.4521E-06
$z_{24}$	$P_{10-9}$	-0.04906	-0.0516549	0.00259236	6.7203E-06
$z_{25}$	$P_{11-6}$	-0.07758	-0.0679395	-0.00964447	9.3016E-05
$z_{26}$	$P_{11-10}$	0.03523	0.0317637	0.00346372	1.1997E-05
$z_{27}$	$P_{13-12}$	-0.01713	-0.0144687	-0.00266271	7.09E-06
$z_{28}$	$P_{14-9}$	-0.09197	-0.0948785	0.00291104	8.4742E-06
$z_{29}$	$P_{14-13}$	-0.05126	-0.0479703	-0.00329192	1.0837E-05
$z_{30}$	$Q_{1-2}$	-0.20728	-0.1915308	-0.01574999	0.00024806
$z_{31}$	$Q_{1-5}$	0.03291	0.0347782	-0.00186439	3.476E-06
$z_{32}$	$Q_{2-5}$	0.00725	0.0006769	0.0065718	4.3189E-05
$z_{33}$	$Q_{3-4}$	0.02574	0.0274012	-0.00166505	2.7724E-06
$z_{34}$	$Q_{4-7}$	-0.08568	0.0874334	-0.05881926	0.00345971
$z_{35}$	$Q_{6-11}$	0.03547	0.0173686	0.01810007	0.00032761
$z_{36}$	$Q_{6-12}$	0.02604	0.0203885	0.0056496	3.1918E-05
$z_{37}$	$Q_{7-8}$	-0.15859	-0.1581463	-0.00044668	1.9952E-07
$z_{38}$	$Q_{9-10}$	0.04101	0.0473616	-0.00635619	4.0401E-05
$z_{39}$	$Q_{10-11}$	-0.01539	-0.0016629	-0.01373202	0.00018857
$z_{40}$	$Q_{12-13}$	0.00685	0.0050217	0.00182385	3.3264E-06
$z_{41}$	$Q_{3-2}$	0.01539	0.0182302	-0.00283905	8.0602E-06
$z_{42}$	$Q_{4-2}$	0.03662	0.0380656	-0.00144734	2.0948E-06
$z_{43}$	$Q_{4-3}$	-0.0508	-0.0535262	0.00272619	7.4321E-06
$z_{44}$	$Q_{5-1}$	0.02671	0.0293543	-0.00264061	6.9728E-06
$z_{45}$	$Q_{5-4}$	-0.16557	-0.138061	-0.02751242	0.00075693
$z_{46}$	$Q_{6-5}$	-0.08113	-0.2761246	-0.10835614	0.01174105
$z_{47}$	$Q_{8-7}$	0.16188	0.1623074	-0.00042847	1.8358E-07
$z_{48}$	$Q_{9-4}$	0.01648	-0.0574677	0.01417421	0.00020091
$z_{49}$	$Q_{9-7}$	-0.04782	-0.0790231	0.0311989	0.00097337
$z_{50}$	$Q_{10-9}$	-0.04046	-0.0469615	0.00650035	4.2255E-05
$z_{51}$	$Q_{11-6}$	-0.03055	-0.0164297	-0.01411689	0.00019929
$z_{52}$	$Q_{11-10}$	0.01501	0.0018507	0.01316316	0.00017327
$z_{53}$	$Q_{13-12}$	-0.00669	-0.0049757	-0.0017108	2.9268E-06
$z_{54}$	$Q_{14-9}$	-0.03563	-0.0419354	0.00631014	3.9818E-05
$z_{55}$	$Q_{14-13}$	-0.01681	-0.0098854	-0.00692756	4.7991E-05
$z_{56}$	$P_2$	0.17943	0.16809307	0.01133551	0.00012849
$z_{57}$	$Q_2$	0.27677	0.28198711	-0.00521481	2.7194E-05

Al igual que en el primer sistema de prueba, los valores de los residuos calculados siguen siendo pequeños en los casos hasta ahora simulados, a pesar de la incertidumbre con la que cuentan las mediciones ingresadas como datos.

El análisis de robustez numérica del Jacobiano de mediciones  $H$  se presenta en la siguiente tabla,

Tabla 4.51 Robustez numérica del Jacobiano de mediciones  $H$  del sistema IEEE 14 (Caso 4).

<b>Rango Numérico</b>			
$rango(H)$		27	
<b>Valores Singulares</b>			
$\sigma_1(H)$	46.04446	$\sigma_{15}(H)$	8.593894
$\sigma_2(H)$	41.30817	$\sigma_{16}(H)$	7.611557
$\sigma_3(H)$	35.36533	$\sigma_{17}(H)$	7.510852
$\sigma_4(H)$	34.27111	$\sigma_{18}(H)$	7.371668
$\sigma_5(H)$	24.86675	$\sigma_{19}(H)$	6.030973
$\sigma_6(H)$	24.36961	$\sigma_{20}(H)$	5.900636
$\sigma_7(H)$	15.55337	$\sigma_{21}(H)$	4.449691
$\sigma_8(H)$	15.03484	$\sigma_{22}(H)$	4.38101
$\sigma_9(H)$	13.45282	$\sigma_{23}(H)$	3.796454
$\sigma_{10}(H)$	12.31098	$\sigma_{24}(H)$	3.318665
$\sigma_{11}(H)$	11.58736	$\sigma_{25}(H)$	2.681788
$\sigma_{12}(H)$	11.47945	$\sigma_{26}(H)$	1.77484
$\sigma_{13}(H)$	10.39428	$\sigma_{27}(H)$	0.4287739
$\sigma_{14}(H)$	8.877693		
<b>Número de Condición</b>			
$\kappa_2(H)$		107.3863	

La distancia existente entre  $H$  y la matriz singular más cercana es  $\sigma_{27} = 0.4287739$ , y la distancia relativa resultante es:

$$DR = \frac{1}{\kappa_2(H)} = 0.009312175$$

Los resultados de la SVD para la matriz  $G$  se muestran en la tabla 4.52.

Tabla 4.52 Robustez numérica de la matriz de ganancia  $G$  del sistema IEEE 14 (Caso 4).

<b>Rango Numérico</b>			
$\text{rango}(G)$		27	
<b>Valores Singulares</b>			
$\sigma_1(G)$	38806570	$\sigma_{15}(G)$	3773199
$\sigma_2(G)$	37410570	$\sigma_{16}(G)$	3593449
$\sigma_3(G)$	26457680	$\sigma_{17}(G)$	1760707
$\sigma_4(G)$	22820840	$\sigma_{18}(G)$	1731268
$\sigma_5(G)$	21741740	$\sigma_{19}(G)$	1666075
$\sigma_6(G)$	20448120	$\sigma_{20}(G)$	1247493
$\sigma_7(G)$	10721320	$\sigma_{21}(G)$	1129442
$\sigma_8(G)$	9993334	$\sigma_{22}(G)$	974187.1
$\sigma_9(G)$	8578508	$\sigma_{23}(G)$	669525.1
$\sigma_{10}(G)$	8198071	$\sigma_{24}(G)$	539935.1
$\sigma_{11}(G)$	4588181	$\sigma_{25}(G)$	309298.8
$\sigma_{12}(G)$	4485393	$\sigma_{26}(G)$	78104.73
$\sigma_{13}(G)$	4434128	$\sigma_{27}(G)$	3657.947
$\sigma_{14}(G)$	4341522		
<b>Número de Condición</b>			
$\kappa_2(G)$		10608.84	

La distancia entre  $G$  y la matriz singular más cercana está dada por  $\sigma_{27} = 3657.947$ , mientras que la distancia relativa es:

$$DR = \frac{1}{\kappa_2(G)} = 0.000094261013$$

En el presente caso vuelve a presentarse que la reducción de medidores de inyección produce una disminución en el número de condición de la matriz de ganancia, volviéndola más robusta. Mientras que en el caso 3 sucede justamente lo contrario, ya que es evidente el aumento en el número de condición de la matriz  $G$ , ocasionado por la eliminación del medidor de magnitud de voltaje del nodo 3. Esto nos indica que las mediciones de voltaje siguen siendo importantes en el proceso de estimación del sistema IEEE 14, debido a que incrementan la robustez numérica de la matriz de ganancia, mientras que las mediciones de inyección de potencia la afectan.

### 4.4.5. CASO 5: ELIMINACIÓN DE 3 MEDIDORES DE FLUJOS, 2 DE VOLTAJE Y 3 DE INYECCIONES

En la simulación del caso 5 del sistema IEEE 14 (figura 4.15), se despreciaron todos los medidores de inyección de potencia y los medidores de voltaje de los nodos 3 y 4, por lo que solo son considerados 26 medidores de flujo y un medidor de voltaje en el nodo 1.

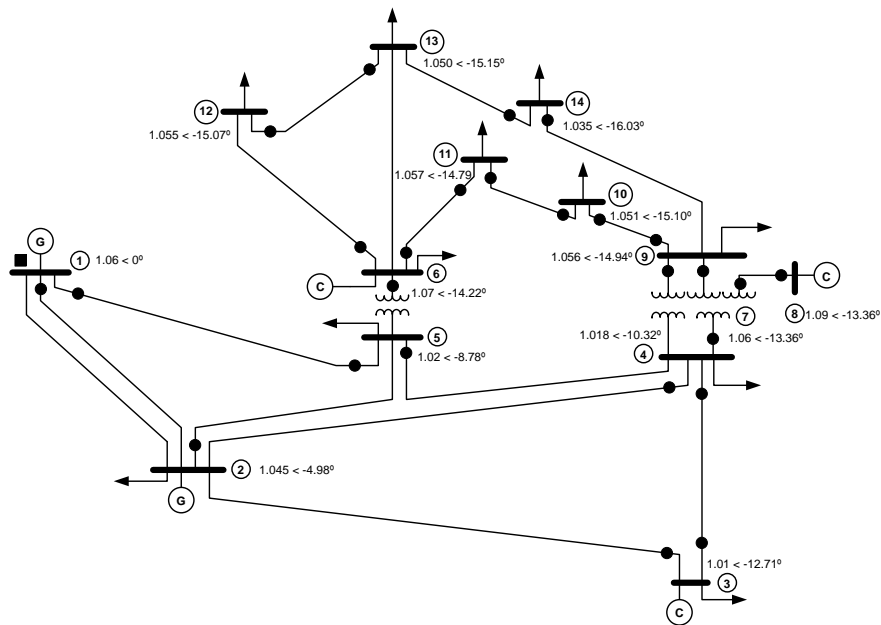


Fig. 4.15 Mediciones del sistema IEEE 14 (Caso 5).

Los datos del caso 5 se muestran en la tabla 4.53,

Tabla 4.53 Valores de  $z$  real,  $z$  aleatoria y varianza del sistema IEEE 14 (Caso 5).

Medición	Variable	$z_i$ real	$z_i$ aleatoria	$\sigma_i^2$
$z_1$	$ V_1 $	1.06	1.06	0.00005242
$z_2$	$P_{1-2}$	1.56833	1.64096	0.00021006
$z_3$	$P_{1-5}$	0.75552	0.73755	0.00007037
$z_4$	$P_{2-5}$	0.41512	0.37531	0.00003563
$z_5$	$P_{3-4}$	-0.23332	-0.23281	0.00002528
$z_6$	$P_{4-7}$	0.28086	0.25942	0.00002796
$z_7$	$P_{6-11}$	0.07341	0.07273	0.00001605
$z_8$	$P_{6-12}$	0.07819	0.08426	0.00001644
$z_9$	$P_{7-8}$	0	0	0.00002047

$z_{10}$	$P_{9-10}$	0.05238	0.05009	0.0000152
$z_{11}$	$P_{10-11}$	-0.03774	-0.03859	0.00001401
$z_{12}$	$P_{12-13}$	0.0161	0.01556	0.00001282
$z_{13}$	$P_{3-2}$	-0.70867	-0.76398	0.00007329
$z_{14}$	$P_{4-2}$	-0.54461	-0.56263	0.00005221
$z_{15}$	$P_{4-3}$	0.23703	0.22976	0.00002536
$z_{16}$	$P_{5-1}$	-0.72788	-0.80021	0.00007752
$z_{17}$	$P_{5-4}$	0.61735	0.6402	0.00006202
$z_{18}$	$P_{6-5}$	-0.44063	-0.401	0.00003837
$z_{19}$	$P_{8-7}$	0	0	0.00002066
$z_{20}$	$P_{9-4}$	-0.16089	-0.16285	0.00002077
$z_{21}$	$P_{9-7}$	-0.28086	-0.27338	0.00002827
$z_{22}$	$P_{10-9}$	-0.05225	-0.04906	0.00001514
$z_{23}$	$P_{11-6}$	-0.07286	-0.07758	0.00001618
$z_{24}$	$P_{11-10}$	0.03786	0.03523	0.00001385
$z_{25}$	$P_{13-12}$	-0.01603	-0.01713	0.00001288
$z_{26}$	$P_{14-9}$	-0.09321	-0.09197	0.00001701
$z_{27}$	$P_{14-13}$	-0.05578	-0.05126	0.00001464
$z_{28}$	$Q_{1-2}$	-0.20392	-0.20728	0.00021006
$z_{29}$	$Q_{1-5}$	0.03503	0.03291	0.00007037
$z_{30}$	$Q_{2-5}$	0.00762	0.00725	0.00003563
$z_{31}$	$Q_{3-4}$	0.02809	0.02574	0.00002528
$z_{32}$	$Q_{4-7}$	-0.0942	-0.08568	0.00002796
$z_{33}$	$Q_{6-11}$	0.03472	0.03547	0.00001605
$z_{34}$	$Q_{6-12}$	0.02492	0.02604	0.00001644
$z_{35}$	$Q_{7-8}$	-0.16909	-0.15859	0.00002047
$z_{36}$	$Q_{9-10}$	0.04306	0.04101	0.0000152
$z_{37}$	$Q_{10-11}$	-0.01528	-0.01539	0.00001401
$z_{38}$	$Q_{12-13}$	0.00743	0.00685	0.00001282
$z_{39}$	$Q_{3-2}$	0.01584	0.01539	0.00007329
$z_{40}$	$Q_{4-2}$	0.03393	0.03662	0.00005221
$z_{41}$	$Q_{4-3}$	-0.05421	-0.0508	0.00002536
$z_{42}$	$Q_{5-1}$	0.0258	0.02671	0.00007752
$z_{43}$	$Q_{5-4}$	-0.1537	-0.16557	0.00006202
$z_{44}$	$Q_{6-5}$	-0.08394	-0.08113	0.00003837
$z_{45}$	$Q_{8-7}$	0.17356	0.16188	0.00002066
$z_{46}$	$Q_{9-4}$	0.01624	0.01648	0.00002077
$z_{47}$	$Q_{9-7}$	-0.04994	-0.04782	0.00002827
$z_{48}$	$Q_{10-9}$	-0.04271	-0.04046	0.00001514
$z_{49}$	$Q_{11-6}$	-0.03357	-0.03055	0.00001618
$z_{50}$	$Q_{11-10}$	0.01557	0.01501	0.00001385



$z_{51}$	$Q_{13-12}$	-0.00737	-0.00669	0.00001288
$z_{52}$	$Q_{14-9}$	-0.03417	-0.03563	0.00001701
$z_{53}$	$Q_{14-13}$	-0.01582	-0.01681	0.00001464

El vector de estimación de estado  $\hat{x}$  obtenido se presenta en la tabla 4.54, requiere de 5 iteraciones para alcanzar su solución y un tiempo de cómputo de 0.1716011 segundos, para una tolerancia de  $1 \times 10^{-5}$ .

Tabla 4.54 Vector de estimación de estado del sistema IEEE 14 (Caso 5).

Variable de estado	Estudio de Flujos	Estudio de Estimación de Estado
$\theta_1$	0	0
$\theta_2$	-4.98094874	-5.13920391
$\theta_3$	-12.7179684	-12.8080308
$\theta_4$	-10.3242221	-10.4275248
$\theta_5$	-8.78257543	-8.82759944
$\theta_6$	-14.222653	-14.1915168
$\theta_7$	-13.3682477	-13.3659445
$\theta_8$	-13.3682477	-13.3659445
$\theta_9$	-14.9466008	-15.0091303
$\theta_{10}$	-15.1043243	-15.1664479
$\theta_{11}$	-14.7952639	-14.8398782
$\theta_{12}$	-15.0774235	-15.1966621
$\theta_{13}$	-15.1589389	-15.2961974
$\theta_{14}$	-16.0389343	-16.1426915
$ V_1 $	1.06	1.06981971
$ V_2 $	1.045	1.05394827
$ V_3 $	1.01	1.01858333
$ V_4 $	1.01862342	1.02748995
$ V_5 $	1.02026375	1.03026206
$ V_6 $	1.07	1.03238127
$ V_7 $	1.06195078	1.03433035
$ V_8 $	1.09	1.06126687
$ V_9 $	1.056346	1.02543119
$ V_{10} $	1.05132789	1.01992585
$ V_{11} $	1.05708185	1.02280704
$ V_{12} $	1.05522013	1.01774116
$ V_{13} $	1.05044256	1.01360489
$ V_{14} $	1.03579477	1.00187613

A pesar de la disminución en la cantidad de los datos de entrada y la incertidumbre aleatoria introducida a estos, los resultados estimados son aproximados a los obtenidos en el estudio de flujos. Los residuos de las mediciones se enlistan en la tabla 4.55,

Tabla 4.55 Residuos de las mediciones del sistema IEEE 14 (Caso 5).

Medición	Variable	$z_i$ aleatoria	$h_i(\hat{x})$	$r_i = z_i - h_i(\hat{x})$	$r_i^2$
$z_1$	$ V_1 $	1.06	1.06981971	-0.00981971	9.6427E-05
$z_2$	$P_{1-2}$	1.64096	1.6491117	-0.00815408	6.6489E-05
$z_3$	$P_{1-5}$	0.73755	0.7731352	-0.03558793	0.0012665
$z_4$	$P_{2-5}$	0.37531	0.4091022	-0.03378885	0.00114169
$z_5$	$P_{3-4}$	-0.23281	-0.236568	0.00376069	1.4143E-05
$z_6$	$P_{4-7}$	0.25942	0.266381	-0.00110032	1.2107E-06
$z_7$	$P_{6-11}$	0.07273	0.0683749	0.00435424	1.8959E-05
$z_8$	$P_{6-12}$	0.08426	0.0818483	0.00241229	5.8192E-06
$z_9$	$P_{7-8}$	0	0	0	0
$z_{10}$	$P_{9-10}$	0.05009	0.0518095	-0.00172208	2.9656E-06
$z_{11}$	$P_{10-11}$	-0.03859	-0.0316745	-0.00691641	4.7837E-05
$z_{12}$	$P_{12-13}$	0.01556	0.0145176	0.00104202	1.0858E-06
$z_{13}$	$P_{3-2}$	-0.76398	-0.715037	-0.04894006	0.00239513
$z_{14}$	$P_{4-2}$	-0.56263	-0.5486775	-0.01394782	0.00019454
$z_{15}$	$P_{4-3}$	0.22976	0.2403129	-0.01054882	0.00011128
$z_{16}$	$P_{5-1}$	-0.80021	-0.7447417	-0.05547295	0.00307725
$z_{17}$	$P_{5-4}$	0.6402	0.6601372	-0.01994164	0.00039767
$z_{18}$	$P_{6-5}$	-0.401	-0.4233132	-0.00647549	4.1932E-05
$z_{19}$	$P_{8-7}$	0	0	0	0
$z_{20}$	$P_{9-4}$	-0.16285	-0.1561626	-0.0115275	0.00013288
$z_{21}$	$P_{9-7}$	-0.27338	-0.2764637	0.00308537	9.5195E-06
$z_{22}$	$P_{10-9}$	-0.04906	-0.0516604	0.0025979	6.7491E-06
$z_{23}$	$P_{11-6}$	-0.07758	-0.0679313	-0.00965268	9.3174E-05
$z_{24}$	$P_{11-10}$	0.03523	0.0317539	0.00347353	1.2065E-05
$z_{25}$	$P_{13-12}$	-0.01713	-0.0144672	-0.00266423	7.0981E-06
$z_{26}$	$P_{14-9}$	-0.09197	-0.0948823	0.00291489	8.4966E-06
$z_{27}$	$P_{14-13}$	-0.05126	-0.0479651	-0.0032971	1.0871E-05
$z_{28}$	$Q_{1-2}$	-0.20728	-0.2067831	-0.00049766	2.4766E-07
$z_{29}$	$Q_{1-5}$	0.03291	0.0328341	7.9711E-05	6.3538E-09
$z_{30}$	$Q_{2-5}$	0.00725	0.0036307	0.00361799	1.309E-05
$z_{31}$	$Q_{3-4}$	0.02574	0.0269757	-0.00123955	1.5365E-06
$z_{32}$	$Q_{4-7}$	-0.08568	0.0885859	-0.05875368	0.003452
$z_{33}$	$Q_{6-11}$	0.03547	0.0173837	0.01808494	0.00032707
$z_{34}$	$Q_{6-12}$	0.02604	0.0203897	0.00564841	3.1904E-05

$z_{35}$	$Q_{7-8}$	-0.15859	-0.1581678	-0.00042514	1.8074E-07
$z_{36}$	$Q_{9-10}$	0.04101	0.0473519	-0.00634645	4.0277E-05
$z_{37}$	$Q_{10-11}$	-0.01539	-0.0016805	-0.01371442	0.00018809
$z_{38}$	$Q_{12-13}$	0.00685	0.005023	0.00182258	3.3218E-06
$z_{39}$	$Q_{3-2}$	0.01539	0.0135425	0.00184868	3.4176E-06
$z_{40}$	$Q_{4-2}$	0.03662	0.0330449	0.00357339	1.2769E-05
$z_{41}$	$Q_{4-3}$	-0.0508	-0.0536307	0.00283064	8.0125E-06
$z_{42}$	$Q_{5-1}$	0.02671	0.0301099	-0.00339626	1.1535E-05
$z_{43}$	$Q_{5-4}$	-0.16557	-0.1384517	-0.0271217	0.00073559
$z_{44}$	$Q_{6-5}$	-0.08113	-0.2794151	-0.10828879	0.01172646
$z_{45}$	$Q_{8-7}$	0.16188	0.1622869	-0.00040801	1.6647E-07
$z_{46}$	$Q_{9-4}$	0.01648	-0.0581535	0.01421974	0.0002022
$z_{47}$	$Q_{9-7}$	-0.04782	-0.0789867	0.03116247	0.0009711
$z_{48}$	$Q_{10-9}$	-0.04046	-0.046956	0.00649488	4.2183E-05
$z_{49}$	$Q_{11-6}$	-0.03055	-0.0164549	-0.01409173	0.00019858
$z_{50}$	$Q_{11-10}$	0.01501	0.0018662	0.01314766	0.00017286
$z_{51}$	$Q_{13-12}$	-0.00669	-0.0049774	-0.00170902	2.9208E-06
$z_{52}$	$Q_{14-9}$	-0.03563	-0.0419325	0.00630717	3.978E-05
$z_{53}$	$Q_{14-13}$	-0.01681	-0.0098881	-0.00692487	4.7954E-05

El análisis numérico del Jacobiano de mediciones  $H$  se presenta en la siguiente tabla,

Tabla 4.56 Robustez numérica del Jacobiano de mediciones  $H$  del sistema IEEE 14 (Caso 5).

Rango Numérico			
$rango(H)$		27	
Valores Singulares			
$\sigma_1(H)$	35.71159	$\sigma_{15}(H)$	8.644137
$\sigma_2(H)$	34.47541	$\sigma_{16}(H)$	7.692736
$\sigma_3(H)$	25.93848	$\sigma_{17}(H)$	7.551691
$\sigma_4(H)$	25.13058	$\sigma_{18}(H)$	7.143237
$\sigma_5(H)$	24.50298	$\sigma_{19}(H)$	6.087376
$\sigma_6(H)$	20.76334	$\sigma_{20}(H)$	5.936659
$\sigma_7(H)$	15.71345	$\sigma_{21}(H)$	4.487681
$\sigma_8(H)$	15.08687	$\sigma_{22}(H)$	4.400404
$\sigma_9(H)$	12.47743	$\sigma_{23}(H)$	3.796151
$\sigma_{10}(H)$	12.38563	$\sigma_{24}(H)$	3.336444
$\sigma_{11}(H)$	11.6908	$\sigma_{25}(H)$	2.674176
$\sigma_{12}(H)$	11.45709	$\sigma_{26}(H)$	1.766116
$\sigma_{13}(H)$	9.412113	$\sigma_{27}(H)$	0.2446228
$\sigma_{14}(H)$	8.959601		

Número de Condición	
$\kappa_2(H)$	145.9864

La distancia existente entre  $H$  y la matriz singular más cercana es  $\sigma_{27} = 0.2446228$ , y la distancia relativa resultante es:

$$DR = \frac{1}{\kappa_2(H)} = 0.00685$$

Los resultados de la SVD para la matriz  $G$  se muestran en la tabla 4.57.

Tabla 4.57 Robustez numérica de la matriz de ganancia  $G$  del sistema IEEE 14 (Caso 5).

Rango Numérico			
$rango(G)$		27	
Valores Singulares			
$\sigma_1(G)$	39641500	$\sigma_{15}(G)$	3650989
$\sigma_2(G)$	37815400	$\sigma_{16}(G)$	3633734
$\sigma_3(G)$	22202320	$\sigma_{17}(G)$	1796243
$\sigma_4(G)$	20683680	$\sigma_{18}(G)$	1738375
$\sigma_5(G)$	10950030	$\sigma_{19}(G)$	1667031
$\sigma_6(G)$	10101080	$\sigma_{20}(G)$	1269350
$\sigma_7(G)$	8767538	$\sigma_{21}(G)$	1144025
$\sigma_8(G)$	8288541	$\sigma_{22}(G)$	961303.6
$\sigma_9(G)$	5048817	$\sigma_{23}(G)$	674669.8
$\sigma_{10}(G)$	4752305	$\sigma_{24}(G)$	545538.8
$\sigma_{11}(G)$	4639803	$\sigma_{25}(G)$	308196
$\sigma_{12}(G)$	4490413	$\sigma_{26}(G)$	78390.83
$\sigma_{13}(G)$	4082410	$\sigma_{27}(G)$	1140.769
$\sigma_{14}(G)$	3859208		
Número de Condición			
$\kappa_2(G)$		34749.79	

La distancia entre la matriz  $G$  y la matriz singular más cercana está dada por  $\sigma_{27} = 1140.769$ , mientras que la distancia relativa es:

$$DR = \frac{1}{\kappa_2(G)} = 0.0000287771$$

Aunque esta configuración converge normalmente y estima valores cercanos a las mediciones originales, la disminución en la cantidad de mediciones produce que la robustez de las matrices analizadas sea la más débil numéricamente hablando. Es decir, el Jacobiano de mediciones  $H$  y la matriz de ganancia  $G$  de esta configuración, son las matrices que más cerca se encuentran de la singularidad.

#### 4.4.6. CASO 6: ELIMINACIÓN DE 14 MEDIDORES DE FLUJO, 2 DE VOLTAJE Y 3 DE INYECCIÓN

Debido a la eliminación de algunas mediciones claves, la presente configuración ocasiona que la red se vuelva no observable. En el diagrama de la figura 4.16 se presenta la distribución de los medidores para el caso 6, en donde se puede observar que los nodos 2, 12 y 13 no son monitoreados, por lo que resulta imposible estimar sus variables de estado.

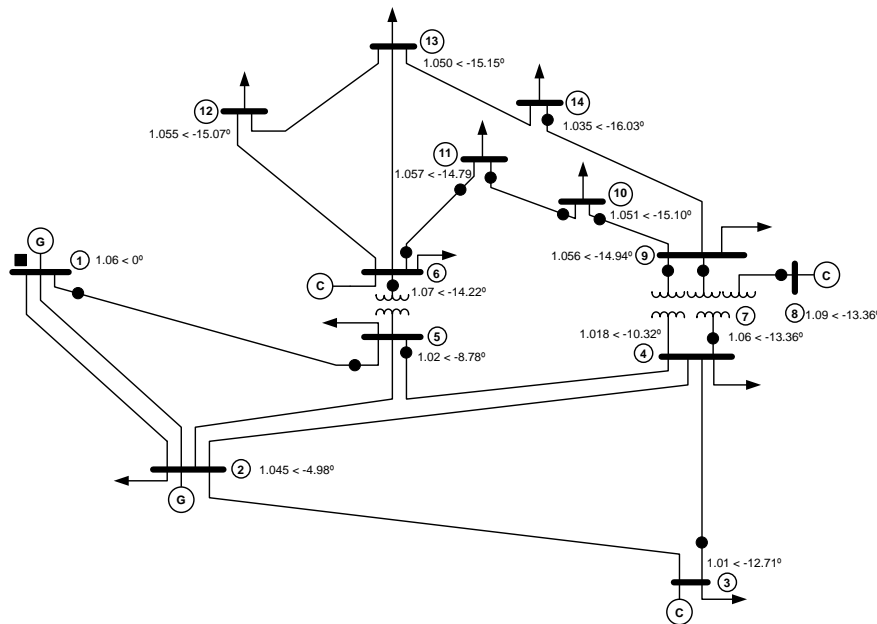


Fig. 4.16 Mediciones del sistema IEEE 14 (Caso 6).

Al simular caso 6 nuevamente se obtiene el mensaje de error mostrado anteriormente en la figura 4.9.

Dicho mensaje de error está relacionado con el mal condicionamiento y la singularidad alcanzada en la matriz de ganancia  $G$ , esto debido a que las columnas 1, 11, 12, 15, 25 y 26 de dicha matriz, son nulas, ocasionando que sea imposible obtener su inversa.

#### 4.4.7. CASO 7: INYECCIÓN "0" EN EL NODO 11, Y ELIMINACIÓN DE MEDIDORES DE FLUJO EN LAS LÍNEAS 5-2, 4-5 Y 9-14

El caso 7 del sistema IEEE 14 se muestra en la figura 4.17, y es similar a la configuración adoptada en el caso 2, con la excepción de que ahora la inyección del nodo 11 es simulado como un nodo de paso o inyección cero.

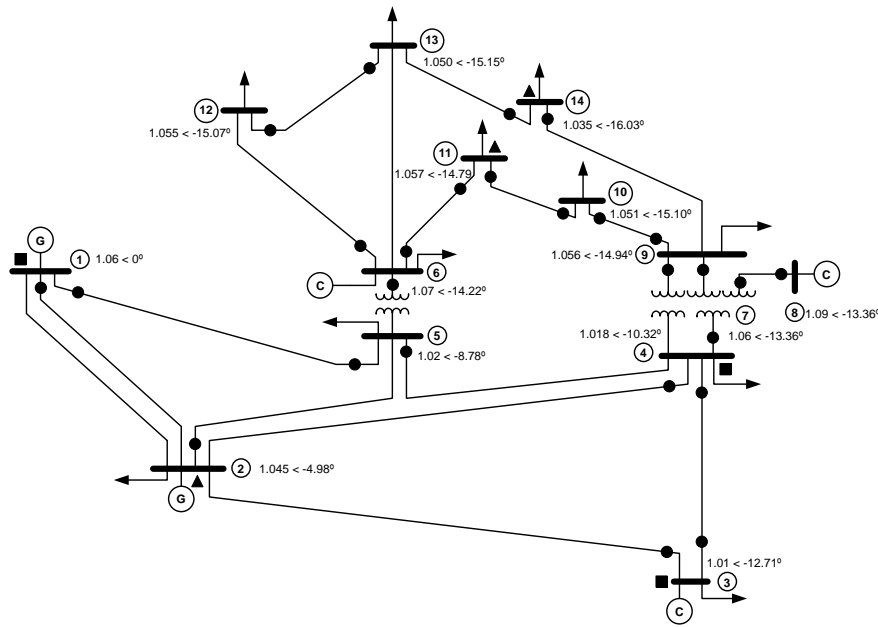


Fig. 4.17 Mediciones del sistema IEEE 14 (Caso 7).

La tabla 4.58 proporciona los datos del caso 7 del sistema IEEE 14,

Tabla 4.58 Valores de  $z$  real,  $z$  aleatoria y varianza del sistema IEEE 14 (Caso 7).

Medición	Variable	$z_i$ real	$z_i$ aleatoria	$\sigma_i^2$
$z_1$	$ V_1 $	1.06	1.06	0.00005242
$z_2$	$ V_3 $	1.01	1.01	0.0000477
$z_3$	$ V_4 $	1.01862	1.01862	0.0000485

$z_4$	$P_{1-2}$	1.56833	1.64096	0.00021006
$z_5$	$P_{1-5}$	0.75552	0.73755	0.00007037
$z_6$	$P_{2-5}$	0.41512	0.37531	0.00003563
$z_7$	$P_{3-4}$	-0.23332	-0.23281	0.00002528
$z_8$	$P_{4-7}$	0.28086	0.25942	0.00002796
$z_9$	$P_{6-11}$	0.07341	0.07273	0.00001605
$z_{10}$	$P_{6-12}$	0.07819	0.08426	0.00001644
$z_{11}$	$P_{7-8}$	0	0	0.00002047
$z_{12}$	$P_{9-10}$	0.05238	0.05009	0.0000152
$z_{13}$	$P_{10-11}$	-0.03774	-0.03859	0.00001401
$z_{14}$	$P_{12-13}$	0.0161	0.01556	0.00001282
$z_{15}$	$P_{3-2}$	-0.70867	-0.76398	0.00007329
$z_{16}$	$P_{4-2}$	-0.54461	-0.56263	0.00005221
$z_{17}$	$P_{4-3}$	0.23703	0.22976	0.00002536
$z_{18}$	$P_{5-1}$	-0.72788	-0.80021	0.00007752
$z_{19}$	$P_{5-4}$	0.61735	0.6402	0.00006202
$z_{20}$	$P_{6-5}$	-0.44063	-0.401	0.00003837
$z_{21}$	$P_{8-7}$	0	0	0.00002066
$z_{22}$	$P_{9-4}$	-0.16089	-0.16285	0.00002077
$z_{23}$	$P_{9-7}$	-0.28086	-0.27338	0.00002827
$z_{24}$	$P_{10-9}$	-0.05225	-0.04906	0.00001514
$z_{25}$	$P_{11-6}$	-0.07286	-0.07758	0.00001618
$z_{26}$	$P_{11-10}$	0.03786	0.03523	0.00001385
$z_{27}$	$P_{13-12}$	-0.01603	-0.01713	0.00001288
$z_{28}$	$P_{14-9}$	-0.09321	-0.09197	0.00001701
$z_{29}$	$P_{14-13}$	-0.05578	-0.05126	0.00001464
$z_{30}$	$Q_{1-2}$	-0.20392	-0.20728	0.00021006
$z_{31}$	$Q_{1-5}$	0.03503	0.03291	0.00007037
$z_{32}$	$Q_{2-5}$	0.00762	0.00725	0.00003563
$z_{33}$	$Q_{3-4}$	0.02809	0.02574	0.00002528
$z_{34}$	$Q_{4-7}$	-0.0942	-0.08568	0.00002796
$z_{35}$	$Q_{6-11}$	0.03472	0.03547	0.00001605
$z_{36}$	$Q_{6-12}$	0.02492	0.02604	0.00001644
$z_{37}$	$Q_{7-8}$	-0.16909	-0.15859	0.00002047
$z_{38}$	$Q_{9-10}$	0.04306	0.04101	0.0000152
$z_{39}$	$Q_{10-11}$	-0.01528	-0.01539	0.00001401
$z_{40}$	$Q_{12-13}$	0.00743	0.00685	0.00001282
$z_{41}$	$Q_{3-2}$	0.01584	0.01539	0.00007329
$z_{42}$	$Q_{4-2}$	0.03393	0.03662	0.00005221
$z_{43}$	$Q_{4-3}$	-0.05421	-0.0508	0.00002536
$z_{44}$	$Q_{5-1}$	0.0258	0.02671	0.00007752

$z_{45}$	$Q_{5-4}$	-0.1537	-0.16557	0.00006202
$z_{46}$	$Q_{6-5}$	-0.08394	-0.08113	0.00003837
$z_{47}$	$Q_{8-7}$	0.17356	0.16188	0.00002066
$z_{48}$	$Q_{9-4}$	0.01624	0.01648	0.00002077
$z_{49}$	$Q_{9-7}$	-0.04994	-0.04782	0.00002827
$z_{50}$	$Q_{10-9}$	-0.04271	-0.04046	0.00001514
$z_{51}$	$Q_{11-6}$	-0.03357	-0.03055	0.00001618
$z_{52}$	$Q_{11-10}$	0.01557	0.01501	0.00001385
$z_{53}$	$Q_{13-12}$	-0.00737	-0.00669	0.00001288
$z_{54}$	$Q_{14-9}$	-0.03417	-0.03563	0.00001701
$z_{55}$	$Q_{14-13}$	-0.01582	-0.01681	0.00001464
$z_{56}$	$P_2$	0.183	0.17943	0.0000697
$z_{57}$	$P_{11}$	0	0	0.0000068
$z_{58}$	$P_{14}$	-0.149	-0.16088	0.00005157
$z_{59}$	$Q_2$	0.2969	0.29148	0.0000697
$z_{60}$	$Q_{11}$	0	0	0.0000068
$z_{61}$	$Q_{14}$	-0.05	-0.04538	0.00005157

El vector de estimación de estado  $\hat{x}$  obtenido se muestra en la tabla 4.59, y requiere de 6 iteraciones para alcanzar su solución, así como un tiempo de cómputo de 0.119206 segundos, para una tolerancia de  $1 \times 10^{-5}$ .

Tabla 4.59 Vector de estimación de estado del sistema IEEE 14 (Caso 7).

Variable de estado	Estudio de Flujos	Estudio de Estimación de Estado
$\theta_1$	0	0
$\theta_2$	-4.98094874	-5.08653497
$\theta_3$	-12.7179684	-12.9355634
$\theta_4$	-10.3242221	-10.5216705
$\theta_5$	-8.78257543	-8.90213602
$\theta_6$	-14.222653	-14.3297864
$\theta_7$	-13.3682477	-13.4915839
$\theta_8$	-13.3682477	-13.4915839
$\theta_9$	-14.9466008	-15.1529463
$\theta_{10}$	-15.1043243	-15.3118354
$\theta_{11}$	-14.7952639	-14.9374082
$\theta_{12}$	-15.0774235	-15.343946
$\theta_{13}$	-15.1589389	-15.4434358
$\theta_{14}$	-16.0389343	-16.3692088
$ V_1 $	1.06	1.06439762



$ V_2 $	1.045	1.04844129
$ V_3 $	1.01	1.0126991
$ V_4 $	1.01862342	1.02168775
$ V_5 $	1.02026375	1.02449433
$ V_6 $	1.07	1.02649592
$ V_7 $	1.06195078	1.02860394
$ V_8 $	1.09	1.05568649
$ V_9 $	1.056346	1.01965584
$ V_{10} $	1.05132789	1.01412277
$ V_{11} $	1.05708185	1.01780551
$ V_{12} $	1.05522013	1.01181249
$ V_{13} $	1.05044256	1.00766921
$ V_{14} $	1.03579477	0.99576668

Los residuos de las mediciones se enlistan en la tabla 4.60,

Tabla 4.60 Residuos de las mediciones del sistema IEEE 14 (Caso 7).

Medición	Variable	$z_i$ aleatoria	$h_i(\hat{x})$	$r_i = z_i - h_i(\hat{x})$	$r_i^2$
$z_1$	$ V_1 $	1.06	1.06439762	-0.00439762	1.9339E-05
$z_2$	$ V_3 $	1.01	1.0126991	-0.0026991	7.2852E-06
$z_3$	$ V_4 $	1.01862	1.02168775	-0.00306775	9.4111E-06
$z_4$	$P_{1-2}$	1.64096	1.6170213	0.02393631	0.00057295
$z_5$	$P_{1-5}$	0.73755	0.77169	-0.0341427	0.00116572
$z_6$	$P_{2-5}$	0.37531	0.4180128	-0.04269945	0.00182324
$z_7$	$P_{3-4}$	-0.23281	-0.2371426	0.00433529	1.8795E-05
$z_8$	$P_{4-7}$	0.25942	0.266231	-0.00095361	9.0937E-07
$z_9$	$P_{6-11}$	0.07273	0.0629158	0.00981332	9.6301E-05
$z_{10}$	$P_{6-12}$	0.08426	0.0816324	0.00262824	6.9076E-06
$z_{11}$	$P_{7-8}$	0	0	8.76E-14	0
$z_{12}$	$P_{9-10}$	0.05009	0.0517538	-0.0016664	2.7769E-06
$z_{13}$	$P_{10-11}$	-0.03859	-0.0366821	-0.00190886	3.6438E-06
$z_{14}$	$P_{12-13}$	0.01556	0.0144253	0.00113428	1.2866E-06
$z_{15}$	$P_{3-2}$	-0.76398	-0.7231481	-0.04082892	0.001667
$z_{16}$	$P_{4-2}$	-0.56263	-0.5570231	-0.00560219	3.1385E-05
$z_{17}$	$P_{4-3}$	0.22976	0.2409497	-0.01118565	0.00012512
$z_{18}$	$P_{5-1}$	-0.80021	-0.7431047	-0.05710993	0.00326154
$z_{19}$	$P_{5-4}$	0.6402	0.6608819	-0.02068631	0.00042792
$z_{20}$	$P_{6-5}$	-0.401	-0.4235019	-0.0062996	3.9685E-05
$z_{21}$	$P_{8-7}$	0	0	-8.76E-14	0
$z_{22}$	$P_{9-4}$	-0.16285	-0.1560765	-0.01161091	0.00013481

Z <sub>23</sub>	P <sub>9-7</sub>	-0.27338	-0.2764079	0.0030296	9.1784E-06
Z <sub>24</sub>	P <sub>10-9</sub>	-0.04906	-0.0516033	0.00254076	6.4555E-06
Z <sub>25</sub>	P <sub>11-6</sub>	-0.07758	-0.0625384	-0.01504558	0.00022637
Z <sub>26</sub>	P <sub>11-10</sub>	0.03523	0.0367905	-0.00156308	2.4432E-06
Z <sub>27</sub>	P <sub>13-12</sub>	-0.01713	-0.0143749	-0.00275654	7.5985E-06
Z <sub>28</sub>	P <sub>14-9</sub>	-0.09197	-0.09883	0.00686254	4.7094E-05
Z <sub>29</sub>	P <sub>14-13</sub>	-0.05126	-0.0508573	-0.00040499	1.6401E-07
Z <sub>30</sub>	Q <sub>1-2</sub>	-0.20728	-0.1982258	-0.00905498	8.1993E-05
Z <sub>31</sub>	Q <sub>1-5</sub>	0.03291	0.0345141	-0.0016003	2.561E-06
Z <sub>32</sub>	Q <sub>2-5</sub>	0.00725	0.002489	0.00475975	2.2655E-05
Z <sub>33</sub>	Q <sub>3-4</sub>	0.02574	0.0273157	-0.00157949	2.4948E-06
Z <sub>34</sub>	Q <sub>4-7</sub>	-0.08568	0.0871629	-0.05864102	0.00343877
Z <sub>35</sub>	Q <sub>6-11</sub>	0.03547	0.0151014	0.0203672	0.00041482
Z <sub>36</sub>	Q <sub>6-12</sub>	0.02604	0.0203344	0.00570366	3.2532E-05
Z <sub>37</sub>	Q <sub>7-8</sub>	-0.15859	-0.1581448	-0.00044811	2.008E-07
Z <sub>38</sub>	Q <sub>9-10</sub>	0.04101	0.0473315	-0.0063261	4.002E-05
Z <sub>39</sub>	Q <sub>10-11</sub>	-0.01539	-0.0036598	-0.01173504	0.00013771
Z <sub>40</sub>	Q <sub>12-13</sub>	0.00685	0.0050376	0.0018079	3.2685E-06
Z <sub>41</sub>	Q <sub>3-2</sub>	0.01539	0.016596	-0.00120485	1.4517E-06
Z <sub>42</sub>	Q <sub>4-2</sub>	0.03662	0.036349	0.00026934	7.2542E-08
Z <sub>43</sub>	Q <sub>4-3</sub>	-0.0508	-0.0533994	0.00259932	6.7565E-06
Z <sub>44</sub>	Q <sub>5-1</sub>	0.02671	0.0297977	-0.00308401	9.5111E-06
Z <sub>45</sub>	Q <sub>5-4</sub>	-0.16557	-0.1380239	-0.02754955	0.00075898
Z <sub>46</sub>	Q <sub>6-5</sub>	-0.08113	-0.2762293	-0.10798846	0.01166151
Z <sub>47</sub>	Q <sub>8-7</sub>	0.16188	0.1623087	-0.00042982	1.8475E-07
Z <sub>48</sub>	Q <sub>9-4</sub>	0.01648	-0.0573369	0.0140868	0.00019844
Z <sub>49</sub>	Q <sub>9-7</sub>	-0.04782	-0.0789301	0.03110582	0.00096757
Z <sub>50</sub>	Q <sub>10-9</sub>	-0.04046	-0.0469318	0.00647066	4.1869E-05
Z <sub>51</sub>	Q <sub>11-6</sub>	-0.03055	-0.0143112	-0.01623539	0.00026359
Z <sub>52</sub>	Q <sub>11-10</sub>	0.01501	0.0039136	0.01110025	0.00012322
Z <sub>53</sub>	Q <sub>13-12</sub>	-0.00669	-0.0049921	-0.00169439	2.871E-06
Z <sub>54</sub>	Q <sub>14-9</sub>	-0.03563	-0.0406724	0.00504708	2.5473E-05
Z <sub>55</sub>	Q <sub>14-13</sub>	-0.01681	-0.008701	-0.00811192	6.5803E-05
Z <sub>56</sub>	P <sub>2</sub>	0.17943	0.16785213	0.01157645	0.00013401
Z <sub>57</sub>	P <sub>11</sub>	0	-0.02574794	0.02574794	0.00066296
Z <sub>58</sub>	P <sub>14</sub>	-0.16088	-0.14968725	-0.01119232	0.00012527
Z <sub>59</sub>	Q <sub>2</sub>	0.29148	0.29445049	-0.00296736	8.8053E-06
Z <sub>60</sub>	Q <sub>11</sub>	0	-0.01039755	0.01039755	0.00010811
Z <sub>61</sub>	Q <sub>14</sub>	-0.04538	-0.04937343	0.00399267	1.5941E-05

Los resultados del análisis numérico realizado al Jacobiano de mediciones  $H$  se presentan en la tabla 4.61.

Tabla 4.61 Robustez numérica del Jacobiano de mediciones  $H$  del sistema IEEE 14 (Caso 7).

<b>Rango Numérico</b>			
$rango(H)$		27	
<b>Valores Singulares</b>			
$\sigma_1(H)$	46.04205	$\sigma_{15}(H)$	9.140884
$\sigma_2(H)$	41.28975	$\sigma_{16}(H)$	8.443525
$\sigma_3(H)$	35.34087	$\sigma_{17}(H)$	8.277171
$\sigma_4(H)$	34.25595	$\sigma_{18}(H)$	7.393748
$\sigma_5(H)$	25.37108	$\sigma_{19}(H)$	6.720838
$\sigma_6(H)$	24.87888	$\sigma_{20}(H)$	6.549913
$\sigma_7(H)$	16.80684	$\sigma_{21}(H)$	5.860515
$\sigma_8(H)$	16.36851	$\sigma_{22}(H)$	5.705091
$\sigma_9(H)$	14.82785	$\sigma_{23}(H)$	3.904383
$\sigma_{10}(H)$	14.46121	$\sigma_{24}(H)$	3.326631
$\sigma_{11}(H)$	13.30188	$\sigma_{25}(H)$	2.694243
$\sigma_{12}(H)$	12.06529	$\sigma_{26}(H)$	1.784427
$\sigma_{13}(H)$	10.39981	$\sigma_{27}(H)$	0.4288333
$\sigma_{14}(H)$	9.46618		
<b>Número de Condición</b>			
$\kappa_2(H)$		107.3658	

La distancia existente entre  $H$  y la matriz singular más cercana es  $\sigma_{27} = 0.4288333$ , y la distancia relativa resultante es:

$$DR = \frac{1}{\kappa_2(H)} = 0.00931395$$

Los resultados de la descomposición en valores singulares para la matriz  $G$  se muestran en la tabla 4.62.

Tabla 4.62 Robustez numérica de la matriz de ganancia  $G$  del sistema IEEE 14 (Caso 7).

<b>Rango Numérico</b>	
$rango(G)$	27
<b>Valores Singulares</b>	

$\sigma_1(G)$	39416260	$\sigma_{15}(G)$	4066476
$\sigma_2(G)$	38023020	$\sigma_{16}(G)$	3855856
$\sigma_3(G)$	26025400	$\sigma_{17}(G)$	1876254
$\sigma_4(G)$	22442100	$\sigma_{18}(G)$	1789744
$\sigma_5(G)$	21699210	$\sigma_{19}(G)$	1715034
$\sigma_6(G)$	20430520	$\sigma_{20}(G)$	1674934
$\sigma_7(G)$	12605490	$\sigma_{21}(G)$	1609001
$\sigma_8(G)$	12045320	$\sigma_{22}(G)$	986435.4
$\sigma_9(G)$	9955950	$\sigma_{23}(G)$	671035.4
$\sigma_{10}(G)$	9271362	$\sigma_{24}(G)$	541531.6
$\sigma_{11}(G)$	4605225	$\sigma_{25}(G)$	311439.1
$\sigma_{12}(G)$	4513108	$\sigma_{26}(G)$	78245.2
$\sigma_{13}(G)$	4453381	$\sigma_{27}(G)$	3656.686
$\sigma_{14}(G)$	4352017		
<b>Número de Condición</b>			
$\kappa_2(G)$	10779.23		

La distancia entre  $G$  y la matriz singular más cercana está dada por  $\sigma_{27} = 3656.686$ , mientras que la distancia relativa es:

$$DR = \frac{1}{\kappa_2(G)} = 0.000092771005$$

Comparando los casos 2 y 7, se puede observar que las variables de estado estimadas son muy similares. La diferencia entre ambas simulaciones es la cantidad de iteraciones en las que convergen a la solución, y el número de condición de la matriz  $G$ , que resulta ser mayor en el caso 7, debido a la inclusión de la inyección cero.

#### 4.4.8. CASO 8: INYECCIÓN "0" EN LOS NODOS 2, 11 Y 14, Y ELIMINACIÓN DE 3 MEDIDORES DE FLUJO

La configuración de mediciones del caso 8 es presentada en la figura 4.18, en donde los 3 medidores de inyecciones de potencia, colocados en los nodos 2, 11 y 14, simulan nodos de paso. Al igual que en caso 7, se eliminan los medidores de flujo de potencia de las líneas 5-2, 4-5 y 9-14.

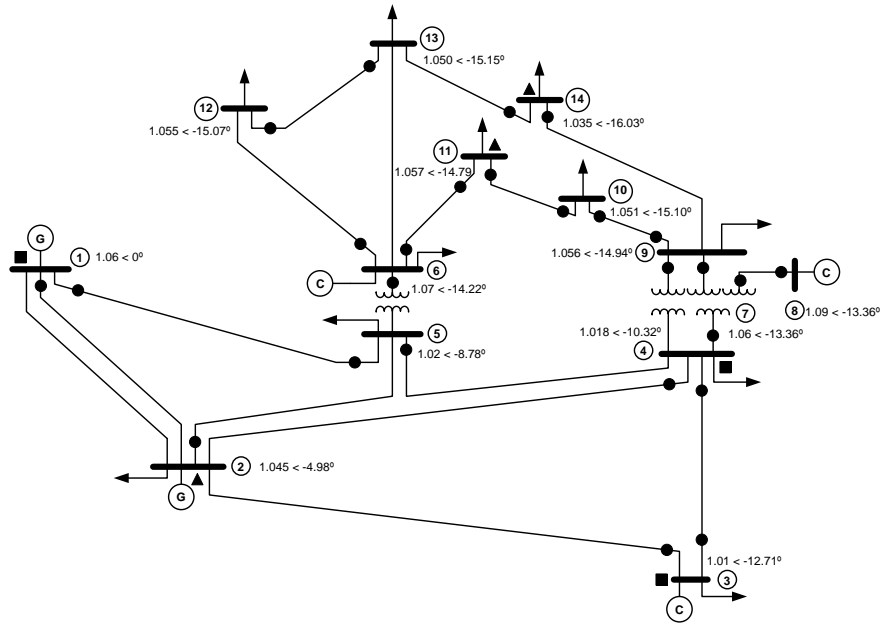


Fig. 4.18 Mediciones del sistema IEEE 14 (Caso 8).

La tabla 4.63 muestra los datos del caso 8 del sistema IEEE 14,

Tabla 4.63 Valores de  $z$  real,  $z$  aleatoria y varianza del sistema IEEE 14 (Caso 8).

Medición	Variable	$z_i$ real	$z_i$ aleatoria	$\sigma_i^2$
$z_1$	$ V_1 $	1.06	1.06	0.00005242
$z_2$	$ V_3 $	1.01	1.01	0.0000477
$z_3$	$ V_4 $	1.01862	1.01862	0.0000485
$z_4$	$P_{1-2}$	1.56833	1.64096	0.00021006
$z_5$	$P_{1-5}$	0.75552	0.73755	0.00007037
$z_6$	$P_{2-5}$	0.41512	0.37531	0.00003563
$z_7$	$P_{3-4}$	-0.23332	-0.23281	0.00002528
$z_8$	$P_{4-7}$	0.28086	0.25942	0.00002796
$z_9$	$P_{6-11}$	0.07341	0.07273	0.00001605
$z_{10}$	$P_{6-12}$	0.07819	0.08426	0.00001644
$z_{11}$	$P_{7-8}$	0	0	0.00002047
$z_{12}$	$P_{9-10}$	0.05238	0.05009	0.0000152
$z_{13}$	$P_{10-11}$	-0.03774	-0.03859	0.00001401
$z_{14}$	$P_{12-13}$	0.0161	0.01556	0.00001282
$z_{15}$	$P_{3-2}$	-0.70867	-0.76398	0.00007329
$z_{16}$	$P_{4-2}$	-0.54461	-0.56263	0.00005221
$z_{17}$	$P_{4-3}$	0.23703	0.22976	0.00002536
$z_{18}$	$P_{5-1}$	-0.72788	-0.80021	0.00007752

$z_{19}$	$P_{5-4}$	0.61735	0.6402	0.00006202
$z_{20}$	$P_{6-5}$	-0.44063	-0.401	0.00003837
$z_{21}$	$P_{8-7}$	0	0	0.00002066
$z_{22}$	$P_{9-4}$	-0.16089	-0.16285	0.00002077
$z_{23}$	$P_{9-7}$	-0.28086	-0.27338	0.00002827
$z_{24}$	$P_{10-9}$	-0.05225	-0.04906	0.00001514
$z_{25}$	$P_{11-6}$	-0.07286	-0.07758	0.00001618
$z_{26}$	$P_{11-10}$	0.03786	0.03523	0.00001385
$z_{27}$	$P_{13-12}$	-0.01603	-0.01713	0.00001288
$z_{28}$	$P_{14-9}$	-0.09321	-0.09197	0.00001701
$z_{29}$	$P_{14-13}$	-0.05578	-0.05126	0.00001464
$z_{30}$	$Q_{1-2}$	-0.20392	-0.20728	0.00021006
$z_{31}$	$Q_{1-5}$	0.03503	0.03291	0.00007037
$z_{32}$	$Q_{2-5}$	0.00762	0.00725	0.00003563
$z_{33}$	$Q_{3-4}$	0.02809	0.02574	0.00002528
$z_{34}$	$Q_{4-7}$	-0.0942	-0.08568	0.00002796
$z_{35}$	$Q_{6-11}$	0.03472	0.03547	0.00001605
$z_{36}$	$Q_{6-12}$	0.02492	0.02604	0.00001644
$z_{37}$	$Q_{7-8}$	-0.16909	-0.15859	0.00002047
$z_{38}$	$Q_{9-10}$	0.04306	0.04101	0.0000152
$z_{39}$	$Q_{10-11}$	-0.01528	-0.01539	0.00001401
$z_{40}$	$Q_{12-13}$	0.00743	0.00685	0.00001282
$z_{41}$	$Q_{3-2}$	0.01584	0.01539	0.00007329
$z_{42}$	$Q_{4-2}$	0.03393	0.03662	0.00005221
$z_{43}$	$Q_{4-3}$	-0.05421	-0.0508	0.00002536
$z_{44}$	$Q_{5-1}$	0.0258	0.02671	0.00007752
$z_{45}$	$Q_{5-4}$	-0.1537	-0.16557	0.00006202
$z_{46}$	$Q_{6-5}$	-0.08394	-0.08113	0.00003837
$z_{47}$	$Q_{8-7}$	0.17356	0.16188	0.00002066
$z_{48}$	$Q_{9-4}$	0.01624	0.01648	0.00002077
$z_{49}$	$Q_{9-7}$	-0.04994	-0.04782	0.00002827
$z_{50}$	$Q_{10-9}$	-0.04271	-0.04046	0.00001514
$z_{51}$	$Q_{11-6}$	-0.03357	-0.03055	0.00001618
$z_{52}$	$Q_{11-10}$	0.01557	0.01501	0.00001385
$z_{53}$	$Q_{13-12}$	-0.00737	-0.00669	0.00001288
$z_{54}$	$Q_{14-9}$	-0.03417	-0.03563	0.00001701
$z_{55}$	$Q_{14-13}$	-0.01582	-0.01681	0.00001464
$z_{56}$	$P_2$	0	0	0.0000068
$z_{57}$	$P_{11}$	0	0	0.0000068
$z_{58}$	$P_{14}$	0	0	0.0000068
$z_{59}$	$Q_2$	0	0	0.0000068

$z_{60}$	$Q_{11}$	0	0	0.0000068
$z_{61}$	$Q_{14}$	0	0	0.0000068

El vector de estimación de estado  $\hat{x}$  obtenido se muestra en la tabla 4.64, y requiere de 6 iteraciones para alcanzar su solución, así como un tiempo de cómputo de 0.156001 segundos, para una tolerancia de  $1 \times 10^{-5}$ .

Tabla 4.64 Vector de estimación de estado del sistema IEEE 14 (Caso 8).

Variable de estado	Estudio de Flujos	Estudio de Estimación de Estado
$\theta_1$	0	0
$\theta_2$	-4.98094874	-5.09477362
$\theta_3$	-12.7179684	-12.653367
$\theta_4$	-10.3242221	-10.3102782
$\theta_5$	-8.78257543	-8.72815166
$\theta_6$	-14.222653	-14.0597841
$\theta_7$	-13.3682477	-13.2293459
$\theta_8$	-13.3682477	-13.2293459
$\theta_9$	-14.9466008	-14.8614392
$\theta_{10}$	-15.1043243	-15.0180345
$\theta_{11}$	-14.7952639	-14.65324
$\theta_{12}$	-15.0774235	-15.0660196
$\theta_{13}$	-15.1589389	-15.1682577
$\theta_{14}$	-16.0389343	-15.5304753
$ V_1 $	1.06	1.07453686
$ V_2 $	1.045	1.04938261
$ V_3 $	1.01	1.0225962
$ V_4 $	1.01862342	1.03092687
$ V_5 $	1.02026375	1.03352684
$ V_6 $	1.07	1.03558888
$ V_7 $	1.06195078	1.03777152
$ V_8 $	1.09	1.06462103
$ V_9 $	1.056346	1.0289155
$ V_{10} $	1.05132789	1.02342391
$ V_{11} $	1.05708185	1.0270304
$ V_{12} $	1.05522013	1.0208486
$ V_{13} $	1.05044256	1.01666081
$ V_{14} $	1.03579477	1.01384598

Los residuos de las mediciones se enlistan en la tabla 4.65,

Tabla 4.65 Residuos de las mediciones del sistema IEEE 14 (Caso 8).

Medición	Variable	$z_i$ aleatoria	$h_i(\hat{x})$	$r_i = z_i - h_i(\hat{x})$	$r_i^2$
$z_1$	$ V_1 $	1.06	1.07453686	-0.01453686	0.00021132
$z_2$	$ V_3 $	1.01	1.0225962	-0.01259619	0.00015866
$z_3$	$ V_4 $	1.01862	1.03092687	-0.01230687	0.00015146
$z_4$	$P_{1-2}$	1.64096	1.6857592	-0.04480161	0.00200718
$z_5$	$P_{1-5}$	0.73755	0.7720983	-0.03455105	0.00119378
$z_6$	$P_{2-5}$	0.37531	0.388997	-0.0136837	0.00018724
$z_7$	$P_{3-4}$	-0.23281	-0.2336338	0.00082657	6.8322E-07
$z_8$	$P_{4-7}$	0.25942	0.2663967	-0.00111566	1.2447E-06
$z_9$	$P_{6-11}$	0.07273	0.0625399	0.0101892	0.00010382
$z_{10}$	$P_{6-12}$	0.08426	0.0825054	0.00175524	3.0809E-06
$z_{11}$	$P_{7-8}$	0	0	0	0
$z_{12}$	$P_{9-10}$	0.05009	0.051895	-0.00180766	3.2676E-06
$z_{13}$	$P_{10-11}$	-0.03859	-0.0363671	-0.00222383	4.9454E-06
$z_{14}$	$P_{12-13}$	0.01556	0.0148155	0.00074412	5.5371E-07
$z_{15}$	$P_{3-2}$	-0.76398	-0.6954903	-0.06848674	0.00469043
$z_{16}$	$P_{4-2}$	-0.56263	-0.5276253	-0.03499999	0.001225
$z_{17}$	$P_{4-3}$	0.22976	0.2372726	-0.00750848	5.6377E-05
$z_{18}$	$P_{5-1}$	-0.80021	-0.743985	-0.0562297	0.00316178
$z_{19}$	$P_{5-4}$	0.6402	0.6559591	-0.01576354	0.00024849
$z_{20}$	$P_{6-5}$	-0.401	-0.4234175	-0.00637824	4.0682E-05
$z_{21}$	$P_{8-7}$	0	0	0	0
$z_{22}$	$P_{9-4}$	-0.16285	-0.1561749	-0.01151562	0.00013261
$z_{23}$	$P_{9-7}$	-0.27338	-0.2764477	0.00306932	9.4207E-06
$z_{24}$	$P_{10-9}$	-0.04906	-0.0517467	0.00268414	7.2046E-06
$z_{25}$	$P_{11-6}$	-0.07758	-0.0621736	-0.01541036	0.00023748
$z_{26}$	$P_{11-10}$	0.03523	0.0364717	-0.0012443	1.5483E-06
$z_{27}$	$P_{13-12}$	-0.01713	-0.0147636	-0.00236787	5.6068E-06
$z_{28}$	$P_{14-9}$	-0.09197	-0.0585506	-0.03341686	0.00111669
$z_{29}$	$P_{14-13}$	-0.05126	-0.018306	-0.03295622	0.00108611
$z_{30}$	$Q_{1-2}$	-0.20728	-0.0505242	-0.15675652	0.02457261
$z_{31}$	$Q_{1-5}$	0.03291	0.0397957	-0.00688187	4.736E-05
$z_{32}$	$Q_{2-5}$	0.00725	-0.0378981	0.04514687	0.00203824
$z_{33}$	$Q_{3-4}$	0.02574	0.0287917	-0.0030555	9.3361E-06
$z_{34}$	$Q_{4-7}$	-0.08568	0.089183	-0.05857672	0.00343123
$z_{35}$	$Q_{6-11}$	0.03547	0.0149828	0.02048586	0.00041967
$z_{36}$	$Q_{6-12}$	0.02604	0.0206683	0.00536976	2.8834E-05
$z_{37}$	$Q_{7-8}$	-0.15859	-0.1581814	-0.00041151	1.6934E-07



$z_{38}$	$Q_{9-10}$	0.04101	0.0473791	-0.00637369	4.0624E-05
$z_{39}$	$Q_{10-11}$	-0.01539	-0.0035703	-0.01182461	0.00013982
$z_{40}$	$Q_{12-13}$	0.00685	0.0050216	0.00182395	3.3268E-06
$z_{41}$	$Q_{3-2}$	0.01539	0.0509167	-0.03552554	0.00126206
$z_{42}$	$Q_{4-2}$	0.03662	0.0715091	-0.03489085	0.00121737
$z_{43}$	$Q_{4-3}$	-0.0508	-0.0559819	0.0051818	2.6851E-05
$z_{44}$	$Q_{5-1}$	0.02671	0.0215774	0.0051363	2.6382E-05
$z_{45}$	$Q_{5-4}$	-0.16557	-0.1413348	-0.02423865	0.00058751
$z_{46}$	$Q_{6-5}$	-0.08113	-0.2816732	-0.10797397	0.01165838
$z_{47}$	$Q_{8-7}$	0.16188	0.1622739	-0.00039507	1.5608E-07
$z_{48}$	$Q_{9-4}$	0.01648	-0.0585291	0.01418477	0.00020121
$z_{49}$	$Q_{9-7}$	-0.04782	-0.078892	0.03106779	0.00096521
$z_{50}$	$Q_{10-9}$	-0.04046	-0.046985	0.00652388	4.2561E-05
$z_{51}$	$Q_{11-6}$	-0.03055	-0.0142158	-0.01633082	0.0002667
$z_{52}$	$Q_{11-10}$	0.01501	0.0038151	0.01119875	0.00012541
$z_{53}$	$Q_{13-12}$	-0.00669	-0.0049747	-0.0017118	2.9303E-06
$z_{54}$	$Q_{14-9}$	-0.03563	-0.0287177	-0.0069076	4.7715E-05
$z_{55}$	$Q_{14-13}$	-0.01681	0.0008501	-0.01766302	0.00031198
$z_{56}$	$P_2$	0	0.01171688	-0.01171688	0.00013729
$z_{57}$	$P_{11}$	0	-0.02570194	0.02570194	0.00066059
$z_{58}$	$P_{14}$	0	-0.07685662	0.07685662	0.00590694
$z_{59}$	$Q_2$	0	0.02898802	-0.02898802	0.00084031
$z_{60}$	$Q_{11}$	0	-0.01040062	0.01040062	0.00010817
$z_{61}$	$Q_{14}$	0	-0.02786764	0.02786764	0.00077661

Los resultados del análisis numérico realizado al Jacobiano de mediciones  $H$  se presentan en la tabla 4.66.

Tabla 4.66 Robustez numérica del Jacobiano de mediciones  $H$  del sistema IEEE 14 (Caso 8).

Rango Numérico			
$rango(H)$		27	
Valores Singulares			
$\sigma_1(H)$	46.02676	$\sigma_{15}(H)$	9.309169
$\sigma_2(H)$	41.72398	$\sigma_{16}(H)$	8.598309
$\sigma_3(H)$	35.92325	$\sigma_{17}(H)$	8.382031
$\sigma_4(H)$	34.59715	$\sigma_{18}(H)$	7.487805
$\sigma_5(H)$	25.83671	$\sigma_{19}(H)$	6.842782
$\sigma_6(H)$	25.11505	$\sigma_{20}(H)$	6.650356
$\sigma_7(H)$	17.10974	$\sigma_{21}(H)$	5.950201
$\sigma_8(H)$	16.52171	$\sigma_{22}(H)$	5.792306

$\sigma_9(H)$	15.09155	$\sigma_{23}(H)$	3.945016
$\sigma_{10}(H)$	14.59378	$\sigma_{24}(H)$	3.388834
$\sigma_{11}(H)$	13.43662	$\sigma_{25}(H)$	2.728106
$\sigma_{12}(H)$	12.25658	$\sigma_{26}(H)$	1.810009
$\sigma_{13}(H)$	10.53753	$\sigma_{27}(H)$	0.4304948
$\sigma_{14}(H)$	9.654713		
<b>Número de Condición</b>			
$\kappa_2(H)$	106.916		

La distancia existente entre  $H$  y la matriz singular más cercana es  $\sigma_{27} = 0.4304948$ , y la distancia relativa resultante es:

$$DR = \frac{1}{\kappa_2(H)} = 0.009353137$$

Los resultados de la descomposición en valores singulares para la matriz  $G$  se muestran en la tabla 4.67.

Tabla 4.67 Robustez numérica de la matriz de ganancia  $G$  del sistema IEEE 14 (Caso 8).

<b>Rango Numérico</b>			
$rango(G)$		27	
<b>Valores Singulares</b>			
$\sigma_1(G)$	44936060	$\sigma_{15}(G)$	4358749
$\sigma_2(G)$	40930790	$\sigma_{16}(G)$	4088174
$\sigma_3(G)$	39709900	$\sigma_{17}(G)$	2108904
$\sigma_4(G)$	38782270	$\sigma_{18}(G)$	1975287
$\sigma_5(G)$	22462400	$\sigma_{19}(G)$	1806040
$\sigma_6(G)$	20840040	$\sigma_{20}(G)$	1737008
$\sigma_7(G)$	13083620	$\sigma_{21}(G)$	1707307
$\sigma_8(G)$	12285220	$\sigma_{22}(G)$	1022109
$\sigma_9(G)$	10313790	$\sigma_{23}(G)$	686706.6
$\sigma_{10}(G)$	9437221	$\sigma_{24}(G)$	562485.3
$\sigma_{11}(G)$	4800332	$\sigma_{25}(G)$	318626.7
$\sigma_{12}(G)$	4657420	$\sigma_{26}(G)$	80248.95
$\sigma_{13}(G)$	4614897	$\sigma_{27}(G)$	3691.526
$\sigma_{14}(G)$	4453793		
<b>Número de Condición</b>			
$\kappa_2(G)$	12172.76		

La distancia entre  $G$  y la matriz singular más cercana está dada por  $\sigma_{27} = 3691.526$ , mientras que la distancia relativa es:

$$DR = \frac{1}{\kappa_2(G)} = 0.000082150638$$

Las variables de estado estimadas en esta configuración tienen una variación mayor, sin embargo aun pueden considerarse adecuadas, en comparación con las obtenidas en el estudio de flujos. Nuevamente aumenta el número de iteraciones en las que converge el sistema, así como el número de condición de la matriz  $G$ , lo cual nos indica que la presencia de inyecciones cero en la red afecta la robustez numérica de la matriz de ganancia.

#### 4.5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

A continuación se presenta un análisis de los resultados obtenidos en cada uno de los sistemas de prueba estudiados en este capítulo. Mediante una tabla resumen se compara el análisis de robustez numérica realizado a las matrices  $H$  y  $G$  en cada uno de los casos.

##### 4.5.1. SISTEMA STAGG

La tabla 4.68 muestra la comparación de la robustez numérica del Jacobiano de mediciones  $H$  de cada uno de los casos simulados para el sistema Stagg,

Tabla 4.68 Análisis de resultados del Jacobiano de mediciones  $H$  del sistema Stagg.

	Caso Base	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
<b>Rango Numérico</b>						
<i>rango (H)</i>	9	9	9	9	9	9
<b>Valores Singulares</b>						
$\sigma_1(H)$	55.35688	28.11227	26.18311	27.33369	25.13146	N/C
$\sigma_2(H)$	53.59602	27.04178	23.79672	22.8066	20.69333	N/C
$\sigma_3(H)$	27.9311	17.29709	13.82666	15.34489	10.31306	N/C
$\sigma_4(H)$	26.66792	14.04374	11.03389	9.225513	9.337778	N/C
$\sigma_5(H)$	16.95979	9.217396	8.552619	6.765054	7.751132	N/C

$\sigma_6(H)$	13.95492	7.131408	7.0914	5.631896	5.828636	N/C
$\sigma_7(H)$	9.195257	6.577424	6.506578	4.465074	4.518605	N/C
$\sigma_8(H)$	6.097714	6.053175	6.016307	2.648929	3.94152	N/C
$\sigma_9(H)$	0.7713648	0.7710964	0.7692769	1.09641	0.4295961	N/C
<b>Número de Condición</b>						
$\kappa_2(H)$	71.76485	36.45752	34.036	24.93017	58.50021	N/C
$DR(H)$	0.0139344	0.02743	0.02938065	0.04011204	0.017094	N/C

La siguiente tabla presenta la comparación pero ahora de la matriz de ganancia  $G$ ,

Tabla 4.69 Análisis de resultados de la matriz de ganancia  $G$  del sistema Stagg.

	Caso Base	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
<b>Rango Numérico</b>						
$rango(G)$	9	9	9	9	9	9
<b>Valores Singulares</b>						
$\sigma_1(G)$	35556060	11822990	10505290	10503930	7941832	N/C
$\sigma_2(G)$	33259470	11420790	10081500	10079470	6659219	N/C
$\sigma_3(G)$	11531580	4975560	4109432	4105813	3545053	N/C
$\sigma_4(G)$	11150680	4602292	3922687	3921060	3262840	N/C
$\sigma_5(G)$	4756973	2781629	2769684	2763854	2106532	N/C
$\sigma_6(G)$	4392148	1750134	1741884	1740903	669630.3	N/C
$\sigma_7(G)$	2744509	1440790	1431549	1425332	583371.9	N/C
$\sigma_8(G)$	757933.3	751500.1	742366.3	742119.3	429021.1	N/C
$\sigma_9(G)$	11959.98	11958.8	11903.91	7759.294	3528.176	N/C
<b>Número de Condición</b>						
$\kappa_2(G)$	2972.919	988.6437	882.5074	1353.722	2250.974	N/C
$DR(G)$	0.00033637	0.001011486	0.001133135	0.0007387041	0.000444252	N/C

En el sistema de prueba Stagg, el caso 1 presentó el análisis de robustez más débil a pesar de ser la configuración que contiene la mayor cantidad de medidores, mientras que la configuración 3 es la más robusta, ya que los números de condición del Jacobiano de mediciones  $H$  y de la matriz de ganancia  $G$  resultaron menores a los obtenidos en los demás casos.

Se observa que existe una mejoría en la robustez numérica de las matrices  $H$  y  $G$ , cuando se comienza a eliminar medidores de inyecciones de potencia. Mientras que la

eliminación de uno o más medidores de voltaje ocasiona que el número de condición de la matriz  $G$  aumente, disminuyendo la distancia de esta a la singularidad.

Una poca cantidad de mediciones en la red produce que la robustez numérica de las matrices empeore, esto es debido a que se está alcanzando la no observabilidad del sistema y pueden existir nodos que no están siendo monitoreados.

#### 4.5.2. SISTEMA IEEE 14

Las tablas 4.70 y 4.71 muestran la comparación de la robustez numérica del Jacobiano de mediciones  $H$  de cada unos de los casos simulados para el sistema IEEE 14,

Tabla 4.70 Análisis de resultados del Jacobiano de mediciones  $H$  del sistema IEEE 14.

	Caso Base	Caso 2	Caso 3	Caso 4
<b>Rango Numérico</b>				
$\text{rango}(H)$	27	27	27	27
<b>Valores Singulares</b>				
$\sigma_1(H)$	48.41366	46.04274	46.1023	46.04446
$\sigma_2(H)$	47.43376	41.29099	41.39788	41.30817
$\sigma_3(H)$	46.15417	35.34193	35.42991	35.36533
$\sigma_4(H)$	41.49887	34.2567	34.3106	34.27111
$\sigma_5(H)$	25.3269	25.36763	25.43678	24.86675
$\sigma_6(H)$	24.93186	24.87678	24.9119	24.36961
$\sigma_7(H)$	16.74526	16.79921	16.84453	15.55337
$\sigma_8(H)$	16.36314	16.35723	16.38021	15.03484
$\sigma_9(H)$	14.7664	14.82443	14.86412	13.45282
$\sigma_{10}(H)$	14.55123	14.4584	14.47781	12.31098
$\sigma_{11}(H)$	13.70311	13.30142	13.31825	11.58736
$\sigma_{12}(H)$	12.29857	12.06557	12.0942	11.47945
$\sigma_{13}(H)$	10.42209	10.39997	10.38444	10.39428
$\sigma_{14}(H)$	9.922251	9.464638	9.488954	8.877693
$\sigma_{15}(H)$	9.652293	9.141179	9.155673	8.593894
$\sigma_{16}(H)$	8.434442	8.443523	8.465475	7.611557
$\sigma_{17}(H)$	8.267254	8.277572	8.290263	7.510852
$\sigma_{18}(H)$	7.444541	7.393963	7.409672	7.371668
$\sigma_{19}(H)$	6.820507	6.721086	6.738473	6.030973
$\sigma_{20}(H)$	6.684028	6.549683	6.559547	5.900636
$\sigma_{21}(H)$	5.943596	5.859823	5.873165	4.449691
$\sigma_{22}(H)$	5.793266	5.704581	5.71499	4.38101

$\sigma_{23}(H)$	3.952321	3.904269	3.897673	3.796454
$\sigma_{24}(H)$	3.48393	3.326612	3.334996	3.318665
$\sigma_{25}(H)$	2.850357	2.694471	2.686475	2.681788
$\sigma_{26}(H)$	1.822218	1.784563	1.788355	1.77484
$\sigma_{27}(H)$	0.4297087	0.4288005	0.3566679	0.4287739
<b>Número de Condición</b>				
$\kappa_2(H)$	112.6662	107.3757	129.2583	107.3863
$DR(H)$	0.008875776	0.009313094	0.007736447	0.009312175

Tabla 4.71 Continuación del análisis de resultados del Jacobiano de mediciones  $H$  del sistema IEEE 14.

	<b>Caso 5</b>	<b>Caso 6</b>	<b>Caso 7</b>	<b>Caso 8</b>
<b>Rango Numérico</b>				
$rango(H)$	27	N/C	27	27
<b>Valores Singulares</b>				
$\sigma_1(H)$	35.71159	N/C	46.04205	46.02676
$\sigma_2(H)$	34.47541	N/C	41.28975	41.72398
$\sigma_3(H)$	25.93848	N/C	35.34087	35.92325
$\sigma_4(H)$	25.13058	N/C	34.25595	34.59715
$\sigma_5(H)$	24.50298	N/C	25.37108	25.83671
$\sigma_6(H)$	20.76334	N/C	24.87888	25.11505
$\sigma_7(H)$	15.71345	N/C	16.80684	17.10974
$\sigma_8(H)$	15.08687	N/C	16.36851	16.52171
$\sigma_9(H)$	12.47743	N/C	14.82785	15.09155
$\sigma_{10}(H)$	12.38563	N/C	14.46121	14.59378
$\sigma_{11}(H)$	11.6908	N/C	13.30188	13.43662
$\sigma_{12}(H)$	11.45709	N/C	12.06529	12.25658
$\sigma_{13}(H)$	9.412113	N/C	10.39981	10.53753
$\sigma_{14}(H)$	8.959601	N/C	9.46618	9.654713
$\sigma_{15}(H)$	8.644137	N/C	9.140884	9.309169
$\sigma_{16}(H)$	7.692736	N/C	8.443525	8.598309
$\sigma_{17}(H)$	7.551691	N/C	8.277171	8.382031
$\sigma_{18}(H)$	7.143237	N/C	7.393748	7.487805
$\sigma_{19}(H)$	6.087376	N/C	6.720838	6.842782
$\sigma_{20}(H)$	5.936659	N/C	6.549913	6.650356
$\sigma_{21}(H)$	4.487681	N/C	5.860515	5.950201
$\sigma_{22}(H)$	4.400404	N/C	5.705091	5.792306
$\sigma_{23}(H)$	3.796151	N/C	3.904383	3.945016
$\sigma_{24}(H)$	3.336444	N/C	3.326631	3.388834
$\sigma_{25}(H)$	2.674176	N/C	2.694243	2.728106
$\sigma_{26}(H)$	1.766116	N/C	1.784427	1.810009
$\sigma_{27}(H)$	0.2446228	N/C	0.4288333	0.4304948
<b>Número de Condición</b>				
$\kappa_2(H)$	145.9864	N/C	107.3658	106.916

$DR(H)$	0.00685	N/C	0.00931395	0.009353137
---------	---------	-----	------------	-------------

Las siguientes tablas presentan la comparación de la matriz de ganancia  $G$ ,

Tabla 4.72 Análisis de resultados de la matriz de ganancia  $G$  del sistema IEEE 14.

	Caso Base	Caso 2	Caso 3	Caso 4
<b>Rango Numérico</b>				
$rango(G)$	27	27	27	27
<b>Valores Singulares</b>				
$\sigma_1(G)$	42596520	39361000	39577640	38806570
$\sigma_2(G)$	40861170	37975020	38080790	37410570
$\sigma_3(G)$	38523440	26026200	26094850	26457680
$\sigma_4(G)$	37451470	22443440	22559530	22820840
$\sigma_5(G)$	25741810	21700410	21808930	21741740
$\sigma_6(G)$	22494210	20431330	20495580	20448120
$\sigma_7(G)$	12338270	12381300	12448740	10721320
$\sigma_8(G)$	11857310	11820270	11853210	9993334
$\sigma_9(G)$	9817750	9920578	9973671	8578508
$\sigma_{10}(G)$	9213313	9246243	9271060	8198071
$\sigma_{11}(G)$	4734359	4605029	4630252	4588181
$\sigma_{12}(G)$	4623698	4512953	4525973	4485393
$\sigma_{13}(G)$	4558309	4453773	4475515	4434128
$\sigma_{14}(G)$	4505345	4352243	4358018	4341522
$\sigma_{15}(G)$	4486316	4063599	4084838	3773199
$\sigma_{16}(G)$	4326004	3856155	3867510	3593449
$\sigma_{17}(G)$	2182224	1876097	1885810	1760707
$\sigma_{18}(G)$	2057788	1789336	1793001	1731268
$\sigma_{19}(G)$	1888185	1713846	1721741	1666075
$\sigma_{20}(G)$	1771975	1674463	1674667	1247493
$\sigma_{21}(G)$	1718784	1608417	1613644	1129442
$\sigma_{22}(G)$	997522.9	986320	991127.3	974187.1
$\sigma_{23}(G)$	722933.9	670908.7	672446.1	669525.1
$\sigma_{24}(G)$	614589.3	541508.6	544203.7	539935.1
$\sigma_{25}(G)$	324220.3	311475.2	310129	309298.8
$\sigma_{26}(G)$	84246.92	78252.85	78489.13	78104.73
$\sigma_{27}(G)$	3680.71	3655.917	2426.543	3657.947
<b>Número de Condición</b>				
$\kappa_2(G)$	11572.91	10766.38	16310.3	10608.84
$DR(G)$	0.0000864087	0.00009288173	0.00006131095	0.000094261013

Tabla 4.73 Continuación del análisis de resultados de la matriz de ganancia  $G$  del sistema IEEE 14.

	Caso 5	Caso 6	Caso 7	Caso 8
<b>Rango Numérico</b>				
$rango(G)$	27	N/C	27	27

<b>Valores Singulares</b>				
$\sigma_1(G)$	39641500	N/C	39416260	44936060
$\sigma_2(G)$	37815400	N/C	38023020	40930790
$\sigma_3(G)$	22202320	N/C	26025400	39709900
$\sigma_4(G)$	20683680	N/C	22442100	38782270
$\sigma_5(G)$	10950030	N/C	21699210	22462400
$\sigma_6(G)$	10101080	N/C	20430520	20840040
$\sigma_7(G)$	8767538	N/C	12605490	13083620
$\sigma_8(G)$	8288541	N/C	12045320	12285220
$\sigma_9(G)$	5048817	N/C	9955950	10313790
$\sigma_{10}(G)$	4752305	N/C	9271362	9437221
$\sigma_{11}(G)$	4639803	N/C	4605225	4800332
$\sigma_{12}(G)$	4490413	N/C	4513108	4657420
$\sigma_{13}(G)$	4082410	N/C	4453381	4614897
$\sigma_{14}(G)$	3859208	N/C	4352017	4453793
$\sigma_{15}(G)$	3650989	N/C	4066476	4358749
$\sigma_{16}(G)$	3633734	N/C	3855856	4088174
$\sigma_{17}(G)$	1796243	N/C	1876254	2108904
$\sigma_{18}(G)$	1738375	N/C	1789744	1975287
$\sigma_{19}(G)$	1667031	N/C	1715034	1806040
$\sigma_{20}(G)$	1269350	N/C	1674934	1737008
$\sigma_{21}(G)$	1144025	N/C	1609001	1707307
$\sigma_{22}(G)$	961303.6	N/C	986435.4	1022109
$\sigma_{23}(G)$	674669.8	N/C	671035.4	686706.6
$\sigma_{24}(G)$	545538.8	N/C	541531.6	562485.3
$\sigma_{25}(G)$	308196	N/C	311439.1	318626.7
$\sigma_{26}(G)$	78390.83	N/C	78245.2	80248.95
$\sigma_{27}(G)$	1140.769	N/C	3656.686	3691.526
<b>Número de Condición</b>				
$\kappa_2(G)$	34749.79	N/C	10779.23	12172.76
$DR(G)$	0.0000287771	N/C	0.000092771005	0.000082150638

Para el sistema de prueba IEEE 14 puede observarse que las configuraciones 3 y 5 presentan una mayor debilidad en la robustez numérica, mientras que la configuración 4 resulta ser la más robusta al contar con el número de condición menor.

Nuevamente se aprecia que las mediciones de magnitud de voltaje están relacionadas con la robustez numérica de la matriz de ganancia  $G$ , ya que al eliminar una o más, el número de condición de dicha matriz incrementa, reduciendo la distancia relativa a la matriz singular. La reducción en la cantidad de medidores de inyección vuelve a producir



una disminución en el número de condición, haciéndola más robusta. Esto nos confirma que el comportamiento de ambos sistemas de prueba es similar, y las mediciones de voltaje son importantes en el proceso de estimación.

Se observa que la presencia de inyecciones cero en los casos 7 y 8 afectan el condicionamiento de las matrices  $H$  y  $G$ , produciendo que estas se acerquen más a la singularidad, además de originar que el algoritmo que estima el estado del sistema, alcance la solución en una mayor cantidad de iteraciones.

CAPÍTULO V –  
CONCLUSIONES Y  
RECOMENDACIONES

## CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se obtuvieron diversos resultados de estimación de estado para los sistemas de prueba *Stagg e IEEE 14*, todos ellos similares a los obtenidos por el estudio de flujos de potencia [58] previamente realizado a cada sistema. Estos resultados fueron sometidos a distintas configuraciones en los datos de entrada, partiendo de un caso base, el cual fue cambiando en cantidad y/o posición de los medidores, con la finalidad de obtener el estado de cada red y calcular la robustez numérica de las matrices de cada caso de estudio, identificando que tipo de mediciones aumentan o disminuyen el número de condición del Jacobiano  $H$  y la matriz  $G$ .

En el sistema de prueba *IEEE 14*, puede observarse que los casos 3 y 5 presentan una mayor debilidad en la robustez numérica, mientras que el caso 4 resulta ser el más robusto.

Se identificó que las mediciones de magnitud de voltaje están sumamente ligadas con la robustez numérica de la matriz de ganancia  $G$ , ya que al eliminar una o más, el número de condición de dicha matriz incrementa, reduciendo la distancia relativa a la matriz singular. Mientras que la reducción en la cantidad de medidores de inyección ocasiona una disminución en el número de condición, haciéndola más robusta. Este comportamiento se presenta en ambos sistemas de prueba, por lo que las mediciones de magnitud de voltaje son relevantes en el proceso de estimación WLS.

Cuando se comienza a eliminar medidores de inyección de potencia, existe mejoría en la robustez numérica de las matrices  $H$  y  $G$ , ya que el número de condición de estas disminuye. Esto indica que la existencia de inyecciones de potencia en el proceso de estimación, debilita el condicionamiento de las matrices.

El hecho de contar con una mayor redundancia a la entrada del estimador no es sinónimo de una mejor robustez numérica. Además existen medidas críticas en el proceso de la estimación, como es el caso de las mediciones de magnitud de voltaje, debido a que el simple hecho de eliminar alguna de ellas, ocasiona que el número de condición se

incremente, produciendo que la distancia de la matriz  $G$  a la matriz singular más cercana, disminuya considerablemente.

Los residuos calculados en todos los casos de ambos sistemas, resultaron pequeños a pesar de la simulación aleatoria del error realizada a cada una de las mediciones introducidas como datos.

Se proporcionó una muestra de la no observabilidad en la red debido a la disminución de las mediciones en cada uno de los sistemas, hasta alcanzar el punto donde uno o más nodos dejan de ser monitoreados, ocasionando que sus variables de estado no puedan ser estimadas, debido a la singularidad que adquiere la matriz  $G$ .

También se obtuvo el estado del sistema a partir de la simulación de nodos de paso o inyecciones cero, las cuales son simuladas con una varianza mayor a las del resto de las mediciones. Debido a esto el algoritmo realizado efectúa una mayor cantidad de iteraciones para alcanzar la solución. También se observa que dichas inyecciones afectan el condicionamiento de las matrices  $H$  y  $G$ , ocasionando una disminución en la robustez numérica de estas.

Por último puede concluirse que la solución del estimador de estado por cuadrados mínimos ponderados resulta satisfactoria. Sin embargo como se pudo apreciar en los resultados mostrados, la utilización de las ecuaciones normales en el proceso presenta algunos inconvenientes, relacionados sobre todo con el mal condicionamiento de la matriz de ganancia  $G$ . Este mal condicionamiento del sistema de ecuaciones es una medida de la proximidad de la matriz de coeficientes a la singularidad, y está representado por el número de condición  $\kappa_2$ .

El número de condición sirve para medir la amplificación que sufren los errores de partida de los datos de entrada del sistema, y los errores de redondeo o truncamiento que se van cometiendo durante la solución.

Existen casos donde podría no lograrse la convergencia del sistema, aún siendo este completamente observable. Esto puede deberse a la combinación de un número de condición elevado, una precisión computacional baja y un criterio de convergencia muy exigente.

Algunas de las causas que pueden agravar el mal condicionamiento de la matriz  $G$  en la estimación WLS son: La utilización de pesos muy altos para medidas virtuales (inyecciones cero), la incidencia de líneas muy cortas y largas en el mismo nodo, y la presencia de medidas de inyección de potencia.

### **5.1. RECOMENDACIONES PARA TRABAJOS FUTUROS**

Se puede llevar a cabo una estimación de estado más completa considerando redes más grandes, en las cuales se consideren mediciones de fasores de voltaje e inyecciones de corriente, para así poder analizar el efecto que tienen dichas medidas sobre el condicionamiento de matrices de mayores dimensiones empleadas en el estudio de estimación.

Se recomienda la utilización de pseudomediciones, en el caso de que las lecturas sean insuficientes. Esto podría trabajarse en paralelo con un estudio de pronóstico de carga, con la finalidad de que las pseudomediciones sean lo más reales posibles.

Por último, sería conveniente implementar al algoritmo, el manejo de múltiples errores sustanciales en la red, ya que ante la presencia de estos, el sistema puede llegar a presentar algún comportamiento no previsto.

## REFERENCIAS

---

## REFERENCIAS

- [1] P. J. Zarco Perrián, A. Gómez Expósito, “Estimación de Estado y de Parámetros en Redes Eléctricas”, Universidad de Sevilla, 1999.
- [2] F. Schweppe, R. B. Douglas, “Power System Static-State Estimation, Part II: Approximate Model”, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-89, pp. 125-130, 1970.
- [3] F. Schweppe, E. Handschin, “Static State Estimation in Electric Power System”, Proceedings IEEE, vol. 62, pp. 972-983, July 1974.
- [4] Ali Abur, A. Gómez Expósito, “Power System State Estimation, Theory and Implementation”, CRC Press, 2004.
- [5] A. Monticelli, State Estimation in Electric Power System. A Generalized Approach, Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [6] G. W. Stagg, O. A. Klitin, “Techniques for Real-Time Monitoring of Power System Operations”, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-89, pp., April 1970.
- [7] J. F. Dopazo, O. A. Klitin, G. W. Stagg, L. S. Van Slyck, “State Calculation of Power Systems From Line Flow Measurements”, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-89, pp. 1698-1708, September/October 1970.
- [8] D. Romero Romero, "Nuevas Formulaciones del Estudio de Flujos Para la Operación de Sistemas Eléctricos de Potencia", Instituto Politécnico Nacional, México D.F., Tesis de Maestría, 1979.
- [9] Jaime Robles García, "Estimación Robusta de Estado en Sistemas Eléctricos de Potencia, Utilizando el Método de la Mediana Mínima Cuadrada", Instituto Politécnico Nacional, Tesis de Maestría, México D.F., 1993.
- [10] H. Y. Michel Hernández, "Estimación de Estado por Mínimos Cuadrados Ponderados en Sistemas de Potencia Empleando el Método de Newton", Instituto Politécnico Nacional, Tesis de Maestría, México D.F., 2009.
- [11] F. Schweppe, J. Wildes, “Power System Static-State Estimation, Part. I: Exact Model”, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-89, pp. 120-125, January 1970.

- 
- [12] E. Handschin, F. Schweppe, J. Kohlas, A. Fiechter, "Bad Data Analysis for Power System State Estimation", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-94, pp. 329-337, 1975.
- [13] F. Schweppe, "Power System Static-State Estimation, Part III: Implementation", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-89, pp. 130-135, 1970.
- [14] A. Gómez Expósito, "Análisis y Operación de Sistemas de Energía Eléctrica", McGraw Hill Interamericana, 2002.
- [15] John J. Grainger, William D. Stevenson, Jr., "Power System Analysis", McGraw-Hill, 1994.
- [16] A. Monticelli, F. F. Wu, "Network observability: Identification of observable islands and measurement placement", IEEE Transactions on Power Apparatus and System, vol. 104, No. 5, pp. 1042-1048, May 1985.
- [17] K. A. Clements, B. F. Wollenberg, "An algorithm for observability determination in power system state estimation", IEEE-PES Winter Meeting, New York, NY, paper A80-008-3, 1980.
- [18] E. E. Fetzler, P. M. Anderson, "Observability in the state estimation of power systems", IEEE Transactions on Power Apparatus and System, vol. PAS-94, No. 6, pp. 1981-1988, Nov/Dec 1975.
- [19] C. Almeida Madson, N. Asada Eduardo, V. García Arioval, "On the use of Gram Matrix in observability analysis", IEEE Transactions on Power Apparatus System, vol. 23, No. 1, Feb. 2008.
- [20] L. Pursell, S. Y. Trimble, "Gram-Schmidt orthogonalization by Gauss elimination", Amer Math Monthly, vol. 98, No. 6, pp. 544-549, Jun/Jul 1991.
- [21] Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, "Matrix Computations", The Johns Hopkins University Press, 3rd. Edition, 1996.
- [22] Biswa Nath Data, "Numerical Linear Algebra and Applications", SIAM – Society for Industrial and Applied Mathematics, 2nd. Edition, 2010.
- [23] David S. Watkins, "Fundamentals of Matrix Computations", John Wiley & Sons, Inc., 2nd. Edition, 2002.



- 
- [24] George A. F. Seber, Alan J. Lee, "Linear Regression Analysis", John Wiley & Sons, Inc., 2nd. Edition, 2003.
- [25] G. H. Golub, "Least Squares, Singular Values and Matriz Approximations", Applications of Mathematics, Vol. 13, No. 1, pp. 44-51, 1968.
- [26] G. H. Golub, C. Reinsch, "Singular Value Decomposition and Least Squares Solutions", Handbook Series Linear Algebra, Numer. Math. 14, pp. 403-420, 1970.
- [27] Dan Kalman, "A Singular Valuable Decomposition: The SVD of a Matrix", The College Mathematics Journal, Vol. 27, No. 1, pp. 2-23, January 1996.
- [28] Virginia C. Klema, Alan J. Laub, "The Singular Value Decomposition: Its Computation and Some Applications", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-25, No. 2, pp. 164-176, April 1980.
- [29] H. D. Abdulla, V. Snasel, "Using Singular Value Decompositions (SVD) as a Solution for Search Result Clustering", International Conference on Innovations in Information Technology, pp. 302-306, Dec. 2008.
- [30] Igor Griva, Stephen G. Nash, Ariela Sofer, "Linear and Nonlinear Optimization", SIAM – Society for Industrial and Applied Mathematics, 2nd. Edition, 2008.
- [31] James E. Gentle, "Matrix Algebra: Theory, Computations, and Applications in Statistics", Springer Texts in Statistics, 2007.
- [32] J. Duncan Glover, Mulukutla S. Sarma, "Power System Analysis and Design", CL-Engineering, 2001.
- [33] A. Papoulis, "Probabilidad, Variables Aleatorias y Procesos Estocásticos", EUNIBAR, 1980.
- [34] P. Z. Peebles, "Principios de Probabilidad, Variables Aleatorias y Señales Aleatorias" McGraw-Hill, 2006.
- [35] R. Y. Rubinstein, "Simulation and the Monte Carlo Method", John Wiley & Sons, 1981.
- [36] F. Schweppe, "Uncertain Dynamic Systems", Prentice Hall, 1973.
- [37] F. Aboytes, Tesis de Doctorado, "Computer Methods for State Estimation and Security Assessment in Electrical Power Systems", 1974.

- 
- [38] G. W. Stagg, A. H. El-Abiad, "Computer Methods in Power Systems Analysis", McGraw-Hill, 1968.
- [39] L. L. Freris, A. M. Sasson, "Investigation of the Load-Flow Problem", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. 115, No. 10, pp. 1459-1470, October 1968.
- [40] J. J. Allemong, L. Radu, A. M. Sasson, "A Fast and Reliable State Estimation Algorithm for AEP's New Control Center", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-101, No. 4, April 1982.
- [41] A. Simoes-Costa, V. H. Quintana, "A Robust Numerical Technique for Power System State Estimation", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-100, No. 2, pp. 691-698, February 1981.
- [42] A. Simoes-Costa, V. H. Quintana, "An Orthogonal Row Processing Algorithm for Power System Sequential State Estimation", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-100, No. 8, pp. 3791-3800, August 1981.
- [43] Robson C. Pires, A. Simoes-Costa, L. Mili, "Iteratively Reweighted Least-Squares State Estimation Through Givens Rotations", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. 14, No. 4, pp. 1499-1507, November 1999.
- [44] I. W. Slutsker, S. Mokhtari, L. A. Jaques, J. M. G. Provost, M. B. Perez, J. B. Sierra, F. G. Gonzalez, J. M. M. Figueroa, "Implementation of Phasor Measurements in State Estimator at Sevillana de Electricidad", Power Industry Computer Application Conference, 1995. Conference Proceedings, 1995 IEEE, Vol., No., pp. 392-398, May 1995.
- [45] M. J. Rice, G. T. Heydt, "Power Systems State Estimation Accuracy Enhancement Through the Use of PMU Measurements", Transmission and Distribution Conference and Exhibition, 2005/2006 IEEE PES, Vol., No., pp.161-165, 21-24 May 2006.
- [46] A. Ghassemian, B. Fardanesh, "Phasor Assisted State Estimation for NYS Transmission System - Implementation & Testing", Power Systems Conference and Exposition, 2009. PSCE '09. IEEE/PES , Vol., No., pp.1-8, 15-18 March 2009.
- [47] A. Z. Gamm, Y. Grishin, A. Glazunova, I. Kolosok, E. Korkina, "New EPS State Estimation Algorithms Based on the Technique of Test Equations and PMU
-

- 
- Measurements", International Conference Power Tech 2007, Lausanne, Paper 256, 2007.
- [48] L. Zhao, A. Abur, "Multiarea State Estimation Using Synchronized Phasor Measurements", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 20, No. 4, pp. 1580-1589, November 2008.
- [49] A. Z. Gamm, I. N. Kolosok, A. S. Paltsev, "Decomposition Algorithm for Power System State Estimation by the Test Equation Technique and its Implementation on the Basis of Multi-agent Approach", IEEE Bucharest Power Tech Conference 2009, Vol., No., pp.1-7, June 28th-July 2nd, 2009.
- [50] Jaime Robles García, "Técnicas Avanzadas para Estimación de Robusta en Sistemas Eléctricos de Potencia Utilizando el Método de la Mediana Mínima Cuadrada", Instituto Politécnico Nacional, Tesis de Doctorado, México D.F., 1996.
- [51] L. Mili, V. Phaniraj, P. J. Rousseeuw, "Robust Estimation Theory for Bad Data Diagnostics in Electric Power Systems", Control and Dynamic Systems, Vol. 37, Academic Press, pp. 271-325, 1990.
- [52] L. Mili, V. Phaniraj, P. J. Rousseeuw, "Least Median of Squares Estimation in Power Systems", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 6, No. 2, pp. 511-523, May 1991.
- [53] L. Mili, M. G. Cheniae, N. S. Vichare, P. J. Rousseeuw, "Robust State Estimation Based on Projection Statistics", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 11, No. 2, pp. 1118-1127, May 1996.
- [54] S. Gastoni, G. Granelli, M. Montagna, "Robust State-Estimation Procedure Based on the Maximum Agreement Between Measurements", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 19, No. 4, pp. 2038-2043, November 2004.
- [55] "IMSL Fortran 90 MP Library User's Guide", Visual Numerics Inc., 1998.
- [56] "The IMSL Family of Products", Visual Numerics Inc., 2002.
- [57] "IMSL Fortran Library User's Guide Math/Library Volume 1 of 2 – Mathematical Functions in Fortran", Visual Numerics Inc., 2003.
-

- 
- [58] Daniel Ávila, "Programa Para Calcular Flujos de Potencia por el Método de Newton-Raphson", SEPI-ESIME Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional, Materia de Análisis Estocástico de Sistemas Eléctricos de Potencia, Febrero 2011.
- [59] W. Jiang, V. Vittal, G. T. Heydt, "A Distributed State Estimator Utilizing Synchronized Phasor Measurements", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 22, No. 2, pp. 563-571, May 2007.
- [60] A. P. Sakis Meliopoulos, G. J. Cokkinides, F. Galvan, B. Fardanesh, "Distributed State Estimator – Advances and Demonstration", Proceedings of the 41st Hawaii International Conference on System Sciences, 2008.
- [61] W. Jiang, V. Vittal, G. T. Heydt, "Diakoptic State Estimator Using Phasor Measurements Units", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 23, No. 4, pp. 1580-1589, November 2008.
- [62] Project Team, "Implementation Issues for Hierarchical State Estimators", Power Systems Engineering Research Center, August 2010.
- [63] A. Gómez Expósito, A. Abur, A. de la Villa Jaén, C. Gómez-Quiles, "A Multilevel State Estimation Paradigm for Smart Grids", Proceedings of the IEEE, Vol. 99, No. 6, pp. 952-976, June 2011.
- [64] X. Bian, X. Rong Li, H. Chen, D. Gan, J. Qiu, "Joint Estimation of State and Parameter With Synchrophasors – Part I: State Tracking", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 26, No. 3, pp. 1196-1208, August 2011.
- [65] X. Bian, X. Rong Li, H. Chen, D. Gan, J. Qiu, "Joint Estimation of State and Parameter With Synchrophasors – Part II: Parameter Tracking", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 26, No. 3, pp. 1209-1220, August 2011.
- [66] M. C. de Almeida, A. V. Garcia, E. N. Asada, "Regularized Least Squares Power System State Estimation", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 27, No. 1, pp. 290-297, February 2012.
- [67] A. Gómez Expósito, C. Gómez-Quiles, A. de la Villa Jaén, "Bilinear Power System State Estimation", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 27, No. 1, pp. 493-501, February 2012.
- [68] P. Hr. Petkov, N. D. Christov, M. M. Konstantinov, "Computational Methods for Linear Control Systems", Prentice Hall, 1991.

- [69] P. Hr. Petkov, N. D. Christov, M. M. Konstantinov, "Computational Methods for Linear Control Systems – Some Opens Questions", 26th IEEE Conference on Decision and Control, Vol.26, No., pp. 818-823, December 1987.
- [70] Arthur M. Breipohl, "Probabilistic Systems Analysis", John Wiley & Sons, Inc, 1970.
- [71] Steven C. Chapra, Raymond P. Canale, "Métodos Numéricos Para Ingenieros", McGraw-Hill, 2007.

APÉNDICE A –  
ESTUDIO DE  
OBSERVABILIDAD

## APÉNDICE A. ESTUDIO DE OBSERVABILIDAD

### A.1. MODELO DE RED NODO/RAMA

El uso de este modelo en estimación de estado supone que el procesador topológico ha reducido el modelo físico a un modelo formado por buses y ramas.

El análisis de observabilidad suele realizarse antes de la estimación de estado con la finalidad de determinar si las mediciones disponibles son suficientes para llevar a cabo la estimación del sistema, y si no, identificar que parte(s) de la red pueden ser estimadas; así como la determinación del conjunto de pseudomediciones que se puede añadir para mejorar la observabilidad [16].

Generalmente los sistemas están diseñados para ser completamente observables, sin embargo pueden existir cambios imprevistos en la topología u otras fallas, que impidan la observabilidad total de la red.

Cuando se emplea el modelo nodo/rama es necesario conocer las siguientes definiciones [18]:

- Definición 1: Una isla física es una parte conectada de una red, cuyas ramas representan líneas de transmisión, transformadores y capacitores en serie.
- Definición 2: Una isla observable es una isla en donde todos los flujos pueden ser calculados a partir de las mediciones disponibles, independientemente de los valores adoptados para la referencia angular.

En un modelo de medición linealizado  $z = H\theta$  se dice que la red observable es si para todo  $\theta$  tal que  $H\theta = 0$ , los flujos de potencia en la red son cero. Cualquier estado donde  $H\theta = 0$  y existan flujos de potencia distintos de cero en la red, se conoce como un estado no observable; así como también una rama que transporte un flujo de potencia distinto de cero se considera una rama no observable.

La figura A.1(a) muestra un sistema formado por una isla física y la parte (b) muestra un sistema formado por dos islas físicas.

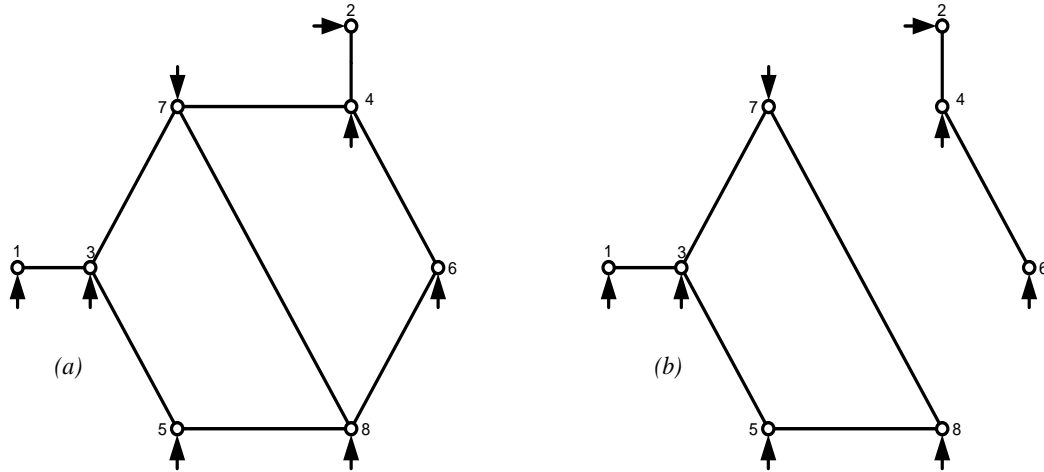


Fig. A.1 Sistema de 8 buses dividido en islas

(a) Sistema compuesto por una isla física. (b) Sistema formado por dos islas físicas [5].

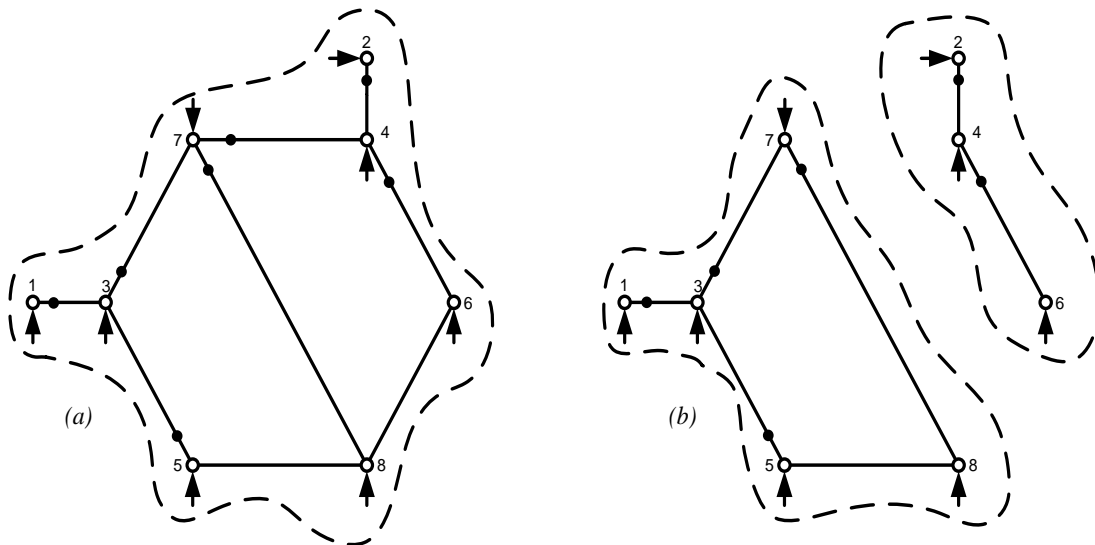


Fig. A.2 Sistema de 8 buses dividido en islas observables

(a) Sistema comprendido por una isla observable. (b) Sistema conformado por dos islas observables [5].



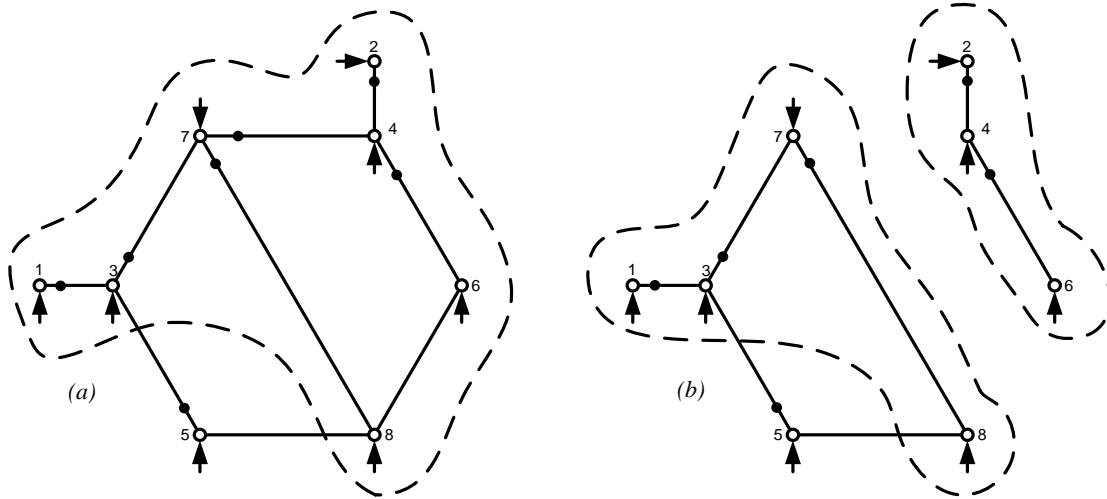


Fig. A.3 Sistema de ocho buses con ramas observables encerradas por líneas punteadas  
 (a) Parte de la isla física es una isla observable. (b) Dos islas físicas: una isla parcialmente observable (izquierda); y la otra completamente observable (derecha) [5].

## A.2. ANÁLISIS TOPOLÓGICO DE OBSERVABILIDAD [14]

Con este estudio se pretende encontrar un mínimo de  $n$  mediciones cuyas ecuaciones sean linealmente independientes y así se pueda declarar al sistema como observable. Esta formulación demuestra que existe una correspondencia uno a uno entre un conjunto de  $n$  columnas linealmente independientes de la matriz de coeficientes, y un árbol del grafo de la red, el cual es construido mediante la asignación de mediciones a ramas.

Dicho árbol es conocido como árbol maximal y sus ramas tienen asociadas distintas mediciones. Los pasos básicos para el desarrollo del análisis topológico son los siguientes:

1. Asignar las mediciones de flujo a sus ramas respectivas, lo cual produce varias "islas de flujo" desconectadas entre sí. Aquí es donde se comienza a formar el árbol de la red.
2. Asignar las mediciones de inyección a sus ramas de manera arbitraria, esto con la finalidad de que dichas mediciones hagan crecer un árbol o bien interconecten a dos de ellos para formar uno solo.

Cuando una medición de inyección no es capaz de hacer crecer las ramas de un árbol, esta suele declararse como una medida redundante y se recomienda ignorarla para futuras iteraciones. Si una vez que se han asignado todas las mediciones, se consigue un árbol interconectado que incluya todos los nodos de la red, se dice que la red es completamente observable, sino, se deben identificar las islas que sean observables.

Para el desarrollo de este trabajo se consideraron a las redes de prueba como completamente observables. Únicamente en el capítulo de resultados se realizan pruebas dejando a la red con un mínimo de mediciones para analizar su comportamiento.

### A.3. MATRIZ DE GRAM PARA EL ANÁLISIS DE OBSERVABILIDAD

Cuando se presenta el caso en el que se cuenta con un sistema que tiene zonas observables y no observables, si tiene un problema el cual implica encontrar el conjunto de pseudomediciones adecuado que hará completamente observable al sistema.

El método de la matriz de Gram puede ser utilizado, entre otras cosas, para la restauración de la observabilidad de la red, así como para efectuar un análisis de mediciones redundantes. Dicha matriz se forma a partir de las filas del Jacobiano de mediciones  $H$ , utilizadas en forma de vector [19, 20].

Partiendo del modelo de estimación de estado, las mediciones son representadas por:

$$z = H(x)\theta \tag{A.1}$$

donde  $\theta$  representa al vector de los ángulos de voltaje y  $h_j^T$  es la  $j$ -ésima fila de  $H(x)$ .

Del conjunto de  $m$  mediciones que se tienen en el sistema, el Jacobiano equivalente está representado por:

$$H(x) = (h_1 \ h_2 \ \dots \ h_m)^T \tag{A.2}$$

La matriz de Gram  $A$  asociada con los vectores  $h_i$ , para  $i = 1, \dots, m$  esta dada por:

$$A = H(x)H(x)^T = \begin{bmatrix} h_1^T h_1 & \cdots & h_1^T h_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_m^T h_1 & \cdots & h_m^T h_m \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

En la ecuación (A.3)  $A_{ij} = h_i^T h_j$  representa el producto interno de los vectores  $h_i$  y  $h_j$ , siendo la matriz  $A$  no singular si y solo si los vectores  $h_i$  son linealmente independientes, lo que significa que las  $m$  mediciones son "no redundantes".

APÉNDICE B –

ESTADÍSTICA

---

## APÉNDICE B. ESTADÍSTICA

### B.1. CONCEPTOS BÁSICOS SOBRE CUADRADOS MÍNIMOS

Los principales conceptos estadísticos involucrados en la teoría de los cuadrados mínimos, en general incluyen manejo de vectores y matrices. Los elementos principales de la teoría probabilística y estadística se encuentran en muy variados textos [33, 34, 36].

De las diversas operaciones que pueden realizarse sobre una variable aleatoria, la mayoría de ellas están basadas en el concepto de esperanza, que es el nombre dado al valor medio cuando en el cálculo del mismo está implicada una variable aleatoria. La esperanza de una variable aleatoria  $X$  es representada por la notación  $E(X)$  o  $\bar{X}$ .

#### *Valor esperado o Esperanza matemática*

Si  $X$  es una variable aleatoria discreta con valores  $x_i$  y funciones de probabilidad  $P(x_i)$ , se puede expresar el valor esperado de  $X$  como:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(x_i) \quad (\text{B.1})$$

Cuando  $X$  es una variable aleatoria continua, la esperanza se calcula mediante la integral de todos los valores y su función de densidad  $f_x(x)$ ,

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx \quad (\text{B.2})$$

El valor esperado proporciona una medida del valor promedio o centro de una distribución de probabilidad.

### Varianza

Otro valor importante en la teoría de probabilidad es la varianza, que puede definirse como la esperanza al cuadrado de la diferencia entre una variable aleatoria  $X$  y la media, y está dada por la siguiente expresión,

$$\sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2] \quad (\text{B.3})$$

donde

$$\mu_X = E(X)$$

La raíz cuadrada positiva  $\sigma_X$  de la varianza se denomina *desviación estándar* de  $X$ , y es una medida de la dispersión de la función  $f_X(x)$  alrededor del valor medio. Si la varianza  $\sigma^2$  es grande, los valores de  $X$  se encuentran dispersos, y si es pequeña, se encuentran cercanos a  $\mu_X$ .

### Covarianza

Una medida de la correlación entre dos variables aleatorias  $X$  y  $Y$  se encuentra dada por la covarianza, representada por [33]:

$$C_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \quad (\text{B.4})$$

Cuando las variables aleatorias  $X$  y  $Y$  son vectores  $n$ -dimensionales, es decir,

$$X = (X_1, \dots, X_n)^T \text{ y } Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$$

su matriz de covarianzas  $\Sigma_{XY}$  es:

$$\Sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)^T] \quad (\text{B.5})$$

## B.2. CUADRADOS MÍNIMOS

La teoría de los cuadrados mínimos aplicada a los sistemas eléctricos de potencia se usa en una gran cantidad de problemas, particularmente en los estudios de flujo de potencia estocástico y la estimación de estado. Para darle solución a estos problemas se necesita conjuntar la teoría estadística y la teoría de redes eléctricas, para así poder determinar mejor las propiedades de las variables que influyen en dichos procesos.

Los principios fundamentales de los cuadrados mínimos se pueden establecer a partir de ideas sencillas y apoyadas en una base matemática formal. Así, cuando se tienen varios datos  $m$  de una variable  $y$  dependiente de otras  $x(n)$ , relación que se puede suponer lineal, para estimar el valor verdadero de  $\hat{y}$ , es lógico desear que los residuos entre los datos y el valor verdadero sean mínimos, lo que se puede expresar como:

$$\text{Mín } J(x) = \text{Mín } \sum_{i=1}^m (\text{Dato}_i - f(x))^2 \quad (\text{B.6})$$

Esto es, el mínimo de la suma de los residuos al cuadrado  $J(x)$ , para evitar la cancelación de residuos positivos y negativos. A la diferencia  $m - n$  se le conoce como grados de libertad.

Cuando se conoce la calidad de los datos, es posible ponderar cada dato por medio de un valor  $w_i$  que se puede expresar como:

$$\text{Mín } J(x) = \text{Mín } \sum_{i=1}^m w_i (\text{Dato}_i - f(x))^2 \quad (\text{B.7})$$

Considerando que la relación entre  $x$  y  $y$  es lineal, entonces se puede expresar como:

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, m$$

Cuya representación en forma matricial puede representarse por,

$$y = Ax + \epsilon \quad (\text{B.8})$$

donde  $\epsilon_i$  representa el ruido o error de la medición de  $y_i$ , que se puede considerar en la calidad de esta.

Entonces,

$$J(x) = \epsilon^T W \epsilon = (y - Ax)^T W (y - Ax) \quad (\text{B.9})$$

Tomando las derivadas parciales de  $J(x)$  e igualando a cero se obtiene la condición de ortogonalidad:

$$A^T W (y - Ax) = 0 \quad (\text{B.10})$$

Para la matriz de ponderación  $W$  se toma en cuenta la varianza de las mediciones como:

$$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2} \quad \text{si} \quad C_\epsilon = \text{diag}(\sigma_i^2)$$

$$\text{ó} \quad W = C_\epsilon^{-1} \quad (\text{B.11})$$

a  $C_\epsilon$  también se le conoce como matriz de error.

Entonces se puede estimar el valor de  $x$ ,

$$\hat{x} = (A^T W A)^{-1} A^T W y \quad (\text{B.12})$$

donde  $\hat{x}$  es el valor calculado de  $x$ . Este es un resultado determinista obtenido por derivación, pero se puede llegar al mismo bajo consideraciones estadísticas [37].



APÉNDICE C –

PROGRAMA

## APÉNDICE C. PROGRAMA

### C.1. SUBROUTINA LEE\_DATOS

Es la primera subrutina del programa principal, en la cual, con ayuda de un archivo de texto, se introducen todos los datos necesarios para que el programa realice la estimación de estado adecuada, y posteriormente haga el cálculo de la robustez numérica en las matrices correspondientes.

A continuación se muestran los bloques que conforman la estructura que debe tener el archivo de entrada de los datos. Dicho archivo debe guardarse con extensión .DAT:

Archivo del estudio de robustez de la estimación de estado, *estimacion.dat*.

#### 1. Número de nodos, generadores, , transformadores, líneas.

NO nodos	NO gen	NO ele	NO transf	NO deriv	NO medFij	NO medFji	NO medV	NO medI	MVAbase	toler	maxiter	error	semilla
----------	--------	--------	-----------	----------	-----------	-----------	---------	---------	---------	-------	---------	-------	---------

- NO nodos := Número de nodos.
- NO gen := Número de generadores.
- NO ele := Número de líneas.
- NO transf := Número de transformadores.
- NO deriv := Número de elementos en derivación.
- NO medFij := Número de mediciones de flujo del nodo i al nodo j.
- NO medFji := Número de mediciones de flujo del nodo j al nodo i.
- NO medV := Número de mediciones de voltaje.
- NO medI := Número de mediciones de inyecciones.
- MVAbase := Potencia base.
- toler := Tolerancia de convergencia.
- maxiter := Máximo de iteraciones.
- error := Porcentaje de error en las mediciones.
- semilla := Semilla para iniciar el cálculo de valores aleatorios.

## 2. Datos del tipo de nodo.

tipoN(nodo)
-------------

tipoN(nodo) := Tipo de nodo (1 = nodo de referencia, 0 = nodo convencional).

## 3. Datos del sistema.

p(ele)	q(ele)	res	reac	yd	ind_tr(ele)
--------	--------	-----	------	----	-------------

p(ele) := Nodo de entrada.

q(ele) := Nodo de salida.

res := Resistencia en serie.

reac := Reactancia en serie.

yd := Admitancia total de la línea / 2.0

ind\_tr(ele) := Indicador de transformador (1 = transformador, 0 = línea).

## 4. Mediciones de voltaje.

dt(nodo)	vs(nodo)	ang(nodo)	feV(nodo)
----------	----------	-----------	-----------

dt(nodo) := Número de nodo.

vs(nodo) := Magnitud de voltaje.

ang(nodo) := Ángulo de voltaje.

feV(nodo) := Fondo de escala del medidor de voltaje.

## 5. Mediciones de flujos.

i(med)	j(med)	Pflujo(med)	Qflujo(med)	feF(med)
--------	--------	-------------	-------------	----------

i(med) := Nodo de entrada.

j(med) := Nodo de salida.

Pflujo(med) := Flujo de potencia activa.

Qflujo(med) := Flujo de potencia reactiva.

feF(med) := Fondo de escala del medidor de flujos.

## 6. Mediciones de inyecciones.

nod(med)	Piny(med)	Qiny(med)	fel(med)
----------	-----------	-----------	----------

nod(med) := Número de nodo.  
 Piny(med) := Inyección de potencia activa.  
 Qiny(med) := Inyección de potencia reactiva.  
 feI(med) := Fondo de escala del medidor de inyección.

### 7. Datos de transformadores.

a(trrafo)	b(trrafo)	tap(trrafo)
-----------	-----------	-------------

a(trrafo) := Nodo con tap.  
 a(trrafo) := Nodo sin tap.  
 tap(trrafo) := Tap.

### 8. Datos de los elementos en derivación.

c(deriv)	sht
----------	-----

c(deriv) := Nodo con elemento en derivación.  
 sht := Valor imaginario del elemento en derivación.

## C.2. SUBROUTINA MATRIZ\_YBUS

Como se menciona en el apartado 3.6, la matriz de admitancias contiene información acerca del comportamiento de todos los elementos que interactúan entre sí para conformar el sistema eléctrico. Su construcción resulta un tanto importante en el proceso de la estimación, debido a que sus parámetros son utilizados en la formación del Jacobiano de mediciones  $H$ .

Debido a que en muchas ocasiones la matriz de admitancias resulta ser muy grande y esparza, y aprovechando que es totalmente simétrica, al momento de construirla se formo primero la diagonal principal y posteriormente se calcularon los valores de la parte triangular superior. Esto con la finalidad de incrementar la eficiencia computacional.

El diagrama de bloques de la figura 3.11 muestra que la ejecución de esta subrutina ocurre justo después de la lectura de los datos de entrada.

### C.3. SUBROUTINA SVD

En esta subrutina se realiza el cálculo de la descomposición en valores singulares (SVD) de las matrices  $H$  y  $G$ . El objetivo de dicho cálculo es conocer el número de condición  $\kappa_2$  de cada una de las matrices, para así poder determinar a qué distancia se encuentran de la singularidad, y ubicar que caso de prueba es el más robusto.

Para realizar la descomposición, se utilizó una subrutina de IMSL la cual brinda la opción de solo calcular los valores singulares  $\Sigma$  de la matriz, o si así se desea, también proporcionar la matriz  $U$ , que contiene los eigenvectores izquierdos, y la matriz  $V$  que contiene los eigenvectores derechos de la matriz en cuestión.

**CALL LSVRR** (*NRA, NCA, A, LDA, IPATH, TOL, IRANK, S, U, LDU, V, LDV*)

Donde:

*NRA* := Número de filas de  $A$ .

*NCA* := Número de columnas de  $A$ .

$A$  := Matriz real  $NRA$  por  $NCA$  cuya SVD se va a calcular.

*LDA* := Dimensión principal de  $A$ .

*IPATH* := Señalamiento usado para el control del cálculo de los vectores singulares.

*TOL* := Tolerancia utilizada para determinar si un valor singular es insignificante.

*IRANK* := Contiene el rango de la matriz  $A$ .

$S$  := Vector que contiene los valores singulares de  $A$ .

$U$  := Matriz que contiene los vectores singulares izquierdos de  $A$ .

*LDU* := Dimensión principal de  $U$ .

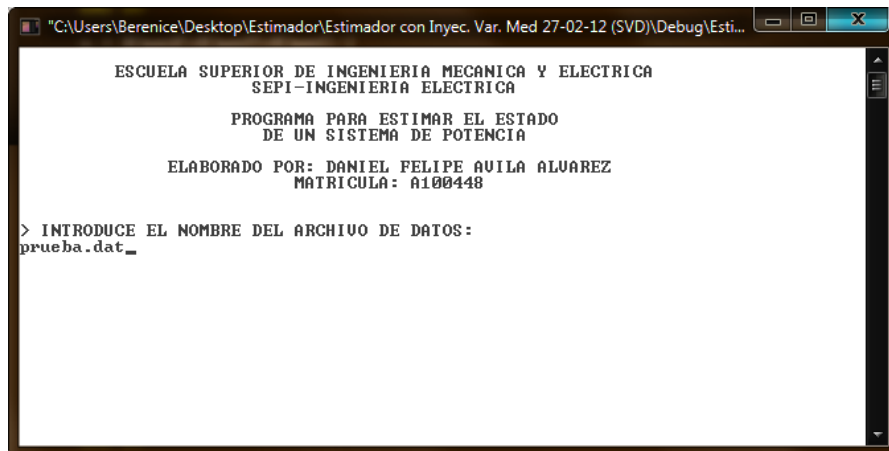
$V$  := Matriz que contiene los vectores singulares derechos de  $A$ .

*LDV* := Dimensión principal de  $V$ .

**NOTA:** Existen tutoriales [55, 56, 57] muy completos acerca de la aplicación de las rutinas de IMSL, o también pueden ser localizadas en el menú de Ayuda del compilador de FORTRAN.

## C.4. EJECUCIÓN DEL PROGRAMA

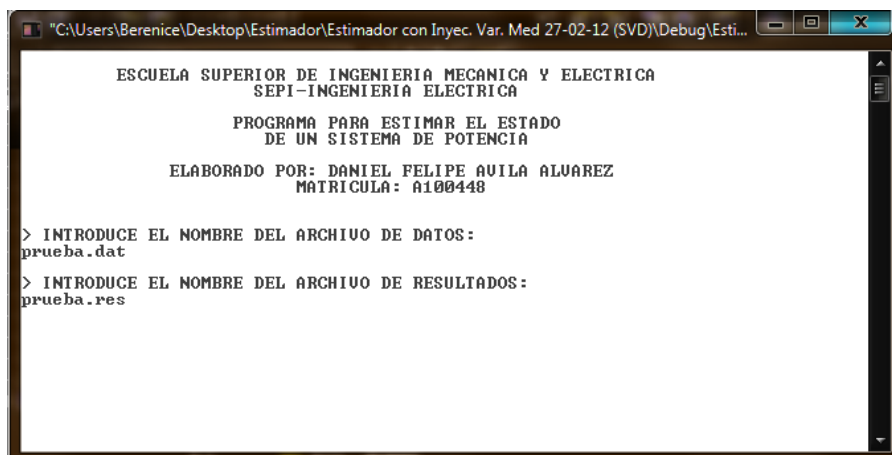
Una vez elaborado el archivo de datos con la estructura mencionada en la sección C.1, se puede llevar a cabo la ejecución del algoritmo realizado en este trabajo. Cuando se termina de compilar el programa, aparece la ventana de ejecución mostrada en la figura C.1, en la que se solicita ingresar el nombre del archivo de datos, el cual debe ser guardado con extensión .dat,



```
"C:\Users\Berenice\Desktop\Estimador\Estimador con Inyec. Var. Med 27-02-12 (SVD)\Debug\Esti...
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
SEPI-INGENIERIA ELECTRICA
PROGRAMA PARA ESTIMAR EL ESTADO
DE UN SISTEMA DE POTENCIA
ELABORADO POR: DANIEL FELIPE AVILA ALVAREZ
MATRICULA: A100448
> INTRODUCER EL NOMBRE DEL ARCHIVO DE DATOS:
prueba.dat_
```

Fig. C.1 Ingreso del archivo de datos en la ventana de ejecución del programa.

Tecleado el archivo de datos, se presiona la tecla Entrar e inmediatamente aparecerá un nuevo mensaje (figura C.2), en el que se solicita se ingrese ahora el nombre del archivo donde se guardarán los resultados. Dicho archivo se guardará con la extensión .res,



```
"C:\Users\Berenice\Desktop\Estimador\Estimador con Inyec. Var. Med 27-02-12 (SVD)\Debug\Esti...
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
SEPI-INGENIERIA ELECTRICA
PROGRAMA PARA ESTIMAR EL ESTADO
DE UN SISTEMA DE POTENCIA
ELABORADO POR: DANIEL FELIPE AVILA ALVAREZ
MATRICULA: A100448
> INTRODUCER EL NOMBRE DEL ARCHIVO DE DATOS:
prueba.dat
> INTRODUCER EL NOMBRE DEL ARCHIVO DE RESULTADOS:
prueba.res
```

Fig. C.2 Ingreso del archivo de resultados en la ventana de ejecución del programa.

Posteriormente es necesario volver a presionar la tecla Entrar para que inicie la ejecución del programa. Al termino de esta tarea aparece un nuevo mensaje en pantalla con la leyenda: "LA ESTIMACIÓN DE ESTADO FUE CALCULADA, ENTER PARA TERMINAR". Presionando cualquier tecla concluye la ejecución del programa.

### C.5. ARCHIVO DE RESULTADOS

Concluida la ejecución del programa, todos los resultados son almacenados en el archivo que se eligió. En dicho archivo se encuentra reportado en una primera parte, el número de iteraciones en las que convergió el sistema, los voltajes nodales estimados, los flujos de potencia estimados, y las inyecciones de potencia nodales. La figura 4.14 brinda una idea de cómo se muestra la primer parte de los resultados:

```

pruebastag4 - copia: Bloc de notas
Archivo Edición Formato Ver Ayuda

          ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
          SEPI-INGENIERIA ELECTRICA

PROGRAMA PARA REALIZAR LA ESTIMACION DE ESTADO DE UN SISTEMA
POR EL METODO DE CUADRADOS MINIMOS PONDERADOS

          ELABORADO POR DANIEL FELIPE AVILA ALVAREZ
          MATRICULA A100448

>> NOMBRE DEL PROYECTO: PRUEBA BUS-SYSTEM

>> FECHA : 08-Mar-12
>> HORA : 16: 8:21

          >> R E S U L T A D O S   D E L   P R O G R A M A   <<

>> EL SISTEMA CONVERGE EN 3 ITERACIONES

VOLTAJES NODALES ESTIMADOS

NODO( 1)=  1.06030552953 <  .00000000000
NODO( 2)=  1.04760653914 < -2.81058940893
NODO( 3)=  1.02401086469 < -5.03549365805
NODO( 4)=  1.02333481860 < -5.30043979560
NODO( 5)=  1.01801339766 < -6.23967128620

FLUJOS DE POTENCIA DEL NODO "p" AL "q" :

DEL BUS( 1)AL BUS( 2) =  89.10031(Mw) + j  -8.40455(MVAR)
DEL BUS( 1)AL BUS( 3) =  41.07198(Mw) + j  1.27952(MVAR)
DEL BUS( 2)AL BUS( 3) =  25.07805(Mw) + j  3.62775(MVAR)
DEL BUS( 2)AL BUS( 4) =  27.69282(Mw) + j  3.26260(MVAR)
DEL BUS( 2)AL BUS( 5) =  56.06980(Mw) + j  7.09001(MVAR)
DEL BUS( 3)AL BUS( 4) =  15.24056(Mw) + j  -3.78384(MVAR)
DEL BUS( 4)AL BUS( 5) =  7.10193(Mw) + j  -2.65803(MVAR)

FLUJOS DE POTENCIA DEL NODO "q" A "p" :

DEL BUS( 2)AL BUS( 1) = -87.68350(Mw) + j  5.98977(MVAR)
DEL BUS( 3)AL BUS( 1) = -39.85969(Mw) + j  -3.07478(MVAR)
DEL BUS( 3)AL BUS( 2) = -24.71568(Mw) + j  -6.83281(MVAR)
DEL BUS( 4)AL BUS( 2) = -27.25727(Mw) + j  -6.24534(MVAR)
DEL BUS( 5)AL BUS( 2) = -54.89615(Mw) + j  -6.76980(MVAR)
DEL BUS( 4)AL BUS( 3) = -15.21769(Mw) + j  1.75662(MVAR)
DEL BUS( 5)AL BUS( 4) = -7.06339(Mw) + j  -2.43529(MVAR)

POTENCIAS NODALES DEL SISTEMA

NODO( 1) =  1.301722828(PU) + j  -.071250226(PU)
NODO( 2) = -.211571632(PU) + j  .199701278(PU)
NODO( 3) = -.493348213(PU) + j  -.136914326(PU)
NODO( 4) = -.333730332(PU) + j  -.071467451(PU)
NODO( 5) = -.619595433(PU) + j  -.092050943(PU)
    
```

Fig. C.3 Primera sección del archivo de resultados.

En la segunda sección se presentan los resultados obtenidos del análisis de robustez numérica realizado. Se reportan los residuos de cada una de las mediciones procesadas, la descomposición en valores singulares de la matriz Jacobiana  $H$  y la matriz de ganancia  $G$ , así como el tiempo de cómputo de la ejecución del programa.

```

pruebastagg4 - copia: Bloc de notas
Archivo Edición Formato Ver Ayuda
>> A N A L I S I S   D E   R O B U S T E Z <<
RESIDUOS CALCULADOS
Residuo( 1)= .0153685743009560
Residuo( 2)= -.0255095915097777
Residuo( 3)= -.0137621058732480
Residuo( 4)= .0042268397393136
Residuo( 5)= .0223092894019848
Residuo( 6)= .0001729035318021
Residuo( 7)= -.0297093624201880
Residuo( 8)= -.0019494134303623
Residuo( 9)= -.0006840457133845
Residuo(10)= .0032150590934023
Residuo(11)= -.0004717550096012
Residuo(12)= -.0048063824443526
Residuo(13)= .0012124878886037
Residuo(14)= -.0017750081157725
Residuo(15)= -.0003055295332524
Residuo(16)= .0002251813999943

DESCOMPOSICION EN VALORES SINGULARES DEL JACOBIANO "H"
Rango del Jacobiano "H" = 9
VALORES SINGULARES "s"
S( 1)= 55.35381000
S( 2)= 53.59150000
S( 3)= 27.92975000
S( 4)= 26.66675000
S( 5)= 16.95860000
S( 6)= 13.95311000
S( 7)= 9.19472500
S( 8)= 6.09695100
S( 9)= .77142380

NUMERO DE ACONDICIONAMIENDO k2
k2(H) = 71.75538000

DISTANCIA RELATIVA
DR(H) = .01396624

DESCOMPOSICION EN VALORES SINGULARES DE LA MATRIZ DE GANANCIA "G"
Rango de la matriz de Ganancia "G" = 9
VALORES SINGULARES "s"
S( 1)= 47876330.00000000
S( 2)= 44892890.00000000
S( 3)= 12203950.00000000
S( 4)= 11112490.00000000
S( 5)= 4539200.00000000
S( 6)= 3042856.00000000
S( 7)= 1352689.00000000
S( 8)= 581513.30000000
S( 9)= 36743.96000000

NUMERO DE ACONDICIONAMIENDO k2
k2(G) = 1302.97200000

DISTANCIA RELATIVA
DR(G) = .00076748

TIEMPO DE CPU (segundos) = .0156250000000000

```

Fig. C.4 Segunda sección del archivo de resultados.



## C.6. CÓDIGO DEL PROGRAMA

! PROGRAMA PRINCIPAL, MANDA LLAMAR A CADA UNA DE LAS SUBROUTINAS

```

PROGRAM ESTIMACION

USE MSIMSLMS
USE MSIMSLC
USE PORTLIB
USE mDATA01
IMPLICIT NONE

INTEGER :: NOUT
REAL :: TIME0, TIME1
INTEGER(4) :: k

TIME0 = CPSEC()

CALL PRESENTA
CALL LEEDATOS
CALL MATRIZYBUS
CALL ERRORMED
CALL VARIANZA
CALL VECTORESTADO

ALLOCATE(Pijcalc(NOmedF/2), Qijcalc(NOmedF/2), hx(NOmed),
deltaz(NOmed))
ALLOCATE(Picalc(NOmedI/2), Qicalc(NOmedI/2))
ALLOCATE(H1(NOmedF/2,NO nodos), H2(NOmedF/2,NO nodos),
H3(NOmedF/2,NO nodos), H4(NOmedF/2,NO nodos))
ALLOCATE(H5(NOmedI/2,NO nodos),
H6(NOmedI/2,NO nodos),H7(NOmedI/2,NO nodos), H8(NOmedI/2,NO nodos))
ALLOCATE(H(NOmed,(2*NO nodos)-1), Htrans((2*NO nodos)-
1,NOmed))
ALLOCATE(Mult1((2*NO nodos)-1,NOmed), G((2*NO nodos)-
1,(2*NO nodos)-1))
ALLOCATE(Mult2((2*NO nodos)-1), deltaX((2*NO nodos)-1))
ALLOCATE(Pij(NOmedF/2), Qij(NOmedF/2), Residuo(NOmed),
ResiduoCuad(NOmed))

conver = 0
! PROCESO ITERATIVO
DO iter=0, maxiter
    IF (conver .EQ. 0) THEN
        CALL RESIDUOSZ
        CALL JACOBIANO
        CALL MATRIZGANANCIA
        CALL SISTEMAEST
    ELSE IF (conver .EQ. 1) THEN
        WRITE(*,*)
        WRITE(*,*) '>> EL SISTEMA
CONVERGE EN',iter,'ITERACIONES'
        WRITE(*,*)
        WRITE(8,02) iter
    02 FORMAT(2/,>> EL SISTEMA CONVERGE
EN',i2,' ITERACIONES')
        EXIT
    END IF
END DO

```

```

SUBROUTINE PRESENTA

IMPLICIT NONE

! ZONA DE DECLARACION DE VARIABLES: REAL, INTEGER, LOGICAL,
COMPLEX, CHARACTER, ENTRE OTROS
CHARACTER(25) :: archdat,archres

! PRESENTA EL NOMBRE DEL PROGRAMA Y SOLICITA EL NOMBRE DEL
USUARIO, ARCHIVO DE DATOS Y DE RESULTADOS

WRITE(6,02)
02 FORMAT(1/,10X,'ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERIA
MECANICA Y ELECTRICA',&
1/,23X,'SEPI-INGENIERIA ELECTRICA',&
2/,21X,'PROGRAMA PARA ESTIMAR EL
ESTADO',&
1/,24X,'DE UN SISTEMA DE POTENCIA',&
2/,15X,'ELABORADO POR: DANIEL FELIPE
AVILA ALVAREZ',&
1/,27X,'MATRICULA: A100448')
WRITE(6,03)
03 FORMAT(2/,>> INTRODUCE EL NOMBRE DEL ARCHIVO DE
DATOS:')
READ(5,15) archdat
FORMAT(A25)
OPEN(UNIT=7,FILE=archdat)
WRITE(6,04)
04 FORMAT(1/,>> INTRODUCE EL NOMBRE DEL ARCHIVO DE
RESULTADOS:')
READ(5,15) archres
OPEN(UNIT=8,FILE=archres)

END SUBROUTINE PRESENTA

SUBROUTINE LEEDATOS

USE mDATA01
IMPLICIT NONE
INTEGER(4) :: ele, nodo, med, trafó, deriv
REAL(8) :: res, reac, yd, sht
CHARACTER(40) :: NOMPROY
COMPLEX(8) :: Atraf, Btraf, Ctraf
CHARACTER(40) :: FECHA
INTEGER(4) hora(3)

CALL ITIME (hora)
CALL DATE (FECHA)

! PRESENTACION DE LA INSTITUCION Y NOMBRE DEL AUTOR DEL
ALGORITMO

WRITE(8,11)

```

```

11      FORMAT(2/,12X,'ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERIA
MECANICA Y ELECTRICA',&
                                /,24X,'SEPI-INGENIERIA
ELECTRICA')
      WRITE(8,12)
12      FORMAT(2/,8X,'PROGRAMA PARA REALIZAR LA
ESTIMACION DE ESTADO DE UN SISTEMA',&
                                /,15X,'POR EL METODO DE
CUADRADOS MINIMOS PONDERADOS')
      WRITE(8,13)
13      FORMAT(2/,17X,'ELABORADO POR DANIEL FELIPE AVILA
ALVAREZ',& /,29X,'MATRICULA A100448')

      READ(7,30)NOMPROY
30      FORMAT(A40)

      WRITE(8,31)NOMPROY
31      FORMAT(3/,>> NOMBRE DEL PROYECTO: ',A40)
      WRITE (8,32)FECHA
32      FORMAT (3/,>> FECHA : ',A40)
      WRITE(8,33) hora
33      FORMAT(>> HORA : ',1X,I2,',',I2,',',I2)

! IMPRIME LOS DATOS DEL SISTEMA ELECTRICO

      WRITE(8,14)
14      FORMAT(3/,9X,'>> V A L O R E S   E N T R A D O S   C O M O
D A T O S <<')
      WRITE(6,16)
16      FORMAT(2/,>> INICIO RUTINA LEEDATOS')

! LEE EL NUMERO DE NODOS, NUMERO DE GENERADORES, NUMERO
DE ELEMENTOS(LINEAS)
! NUMERO DE TRANSF., NUMERO DE ELEMENTOS EN DERIVACION, LA
POTENCIA BASE Y TOLERANCIA

      READ(7,*)NOnodos, NOgen, NOele, NOtransf, NOderiv,
NomedFij, NomedFji, NomedV, NomedI, MVAbase, toler,
      maxiter, error, semilla

      NomedF = NomedFij + NomedFji
      Nomed = NomedF+NomedV+NomedI
      WRITE(8,17) NOnodos, NOele, NOtransf, NOderiv, NomedF,
NomedV, NomedI, error, semilla
17      FORMAT(2/,NUMERO DE NODOS = ',I3,1/,NUMERO DE
ELEMENTOS = ',I3,&
      1/,NUMERO DE TRANSFORMADORES = ',I3,1/,NUMERO DE
ELEMENTOS EN DERIVACION = ',I3,&
      1/,NUMERO DE MEDICIONES DE FLUJO =
',I3,1/,NUMERO DE MEDICIONES DE VOLTAJE = ',I3,&
      1/,NUMERO DE MEDICIONES DE
INYECCIONES = ',I3,1/,ERROR DE LA MEDICION = ',F6.3,&
      1/,SEMILLA = ',I9)

! DIMENSIONA LAS VARIABLES MULTIVARIABLES CON RESPECTO AL
TIPO DE ARREGLO QUE REQUIERE

      ALLOCATE (p(NOele), q(NOele), zpq(NOele), ypq2(NOele),
E(NOnodos))
      ALLOCATE (tipoN(NOnodos), ind_tr(NOele))
      ALLOCATE (dt(NomedV), vs(NomedV), ang(NomedV),
sigmaV(NomedV))

      ALLOCATE (i(NomedF/2), j(NomedF/2), Pflujo(NomedF/2),
Qflujo(NomedF/2), sigmaF(NomedF/2))
      ALLOCATE (nod(NomedI/2), Piny(NomedI/2), Qiny(NomedI/2),
sigmaI(NomedI/2))
      ALLOCATE (feV(NomedV), feF(NomedF/2), feI(NomedI/2))
      ALLOCATE (tap(NOtransf), shunt(NOderiv), a(NOtransf),
b(NOtransf), c(NOderiv))
      ALLOCATE (ybus(NOnodos,NOnodos))

! LEE EL TIPO DE NODO

      DO nodo=1,NOnodos
      READ(7,*) tipoN(nodo)
      IF(tipoN(nodo) .EQ. 1) THEN
      refer=nodo
      END IF
      END DO

! INICIALIZA EN 0 LAS VARIABLES COMPLEJAS

      ypq2=(0.0,0.0)
      ybus=(0.0,0.0)

      WRITE(8,18)
18      FORMAT(2/,19X,'IMPEDANCIAS Y ADMITANCIAS
PRIMITIVAS',&
      1/,23X,'(valores en p.u.)',&
      1/,20X,'N O D O',&
      1/,10X,'ELEMENTO',2X,'p',5X,'q',4X,'IMPEDANCIA SERIE',9X,'ypq2')

! PARA CADA ELEMENTO LEE: NODO DE SALIDA (p), NODO DE
LLEGADA (q) E IMPEDANCIA SERIE(zpq)

      DO ele=1,NOele
      READ(7,*) p(ele), q(ele), res, reac, yd, ind_tr(ele)

      zpq(ele)=res+(0.0,1.0)*reac

      ypq2(ele)=yd*(0.0,1.0)
      WRITE(8,19)ele, p(ele), q(ele), zpq(ele), ypq2(ele)
19      FORMAT(12X,I3,I6,I6,F10.5,SP,F8.5,SS,',',3X,F8.5,SP,F8.5,SS,',')
      END DO
      WRITE(8,20)
20      FORMAT(2/,17X,'M E D I C I O N E S   D E   V O L T A J E',&
      1/,16X,'Tipo: (0)referencia (1)nodo convencional',&
      1/,16X,'NODO',6X,'TIPO',10X,'VOLTAJE',10X,'F.ESC',&
      1/,41X,(PU))

! LEE LAS MEDICIONES DE VOLTAJE (NODO, MAGNITUD, ANGULO) Y
SU DESV. ESTANDAR

      DO nodo=1, NomedV
      READ(7,*) dt(nodo), vs(nodo), ang(nodo), feV(nodo)
      !aux2=aux2*3.141592/180
      E(nodo)=
vs(nodo)*(DCOSD(ang(nodo)))+(0.0,1.0)*DSIND(ang(nodo)))
      IF(tipoN(nodo) .EQ. 1)THEN

```

```

WRITE(8,21) nodo, E(nodo), feV(nodo)
21
FORMAT(16X,I3,6X,'Refer:',4X,F8.5,SP,F8.5,SS,'j',5X,F5.4)
ELSE IF(tipoN(nodo) .EQ. 0) THEN
WRITE(8,29) nodo, E(nodo), feV(nodo)
29
FORMAT(16X,I3,6X,'Conve:',4X,F8.5,SP,F8.5,SS,'j',5X,F5.4)
END IF
END DO

! LEE LOS DATOS DE LAS MEDICIONES DE FLUJOS (i, j, P, Q Y SU DESV.
ESTANDAR)

WRITE(8,35)
35
FORMAT(2/,18X,'M E D I C I O N E S   D E   F L U J O S',&
1/,24X,'(v a l o r e s   e n   p. u.)',&
1/,20X,'N O D O',&
1/,12X,'D A T O',4X,'i',5X,'j',6X,'Pflujo',7X,'Qflujo',5X,F.ESC)

DO med=1, NomedF/2
READ(7,*) i(med), j(med), Pflujo(med), Qflujo(med),
feF(med)
WRITE(8,36) med, i(med), j(med), Pflujo(med),
Qflujo(med), feF(med)
36
FORMAT(12X,I3,I6,I6,3X,F9.5,4X,F9.5,5X,F5.3)
END DO

! LEE LOS DATOS DE LAS MEDICIONES DE INYECCIONES (NODO, P, Q Y
SU DESV. ESTANDAR)

IF(NomedI .NE. 0) THEN
WRITE(8,40) NomedI
40
FORMAT(2/, 'EL SISTEMA CUENTA CON ',12,'
MEDICIONES DE INYECCION')

DO med=1, NomedI/2
READ(7,*) nod(med), Piny(med),
Qiny(med), fel(med)
END DO
END IF

! LEE LOS DATOS DE LOS TRANSFORMADORES SI EXISTEN

IF(NOtransf .NE. 0) THEN
WRITE(8,22) NOtransf
22
FORMAT(2/, 'EL SISTEMA CUENTA CON ',12,'
TRANSFORMADORES')

DO trafo=1, NOtransf
READ(7,*) a(trafo), b(trafo), tap(trafo)
WRITE(8,23) a(trafo), b(trafo),
tap(trafo)
23
FORMAT(4X,I6,I6,F10.5)

DO ele=1, NOele
IF
(ind_tr(ele) .EQ. 1) THEN

! LEE LOS DATOS DE LOS ELEMENTOS EN DERIVACION SI EXISTEN

IF(NOderiv .NE. 0) THEN
WRITE(8,24) NOderiv
24
FORMAT(2/, 'EL SISTEMA CUENTA CON ',12,'
ELEMENTOS EN DERIVACION')

DO deriv=1, NOderiv

```

```

                READ(7,*)c(deriv), sht
                shunt(deriv)=(0.0,1.0)*sht
                WRITE(8,25)c(deriv), shunt(deriv)
25             FORMAT(4X,I6,F9.6,SP,F9.6,SS,'j')

                ybus(c(deriv),c(deriv))=ybus(c(deriv),c(deriv))+shunt(deriv)
                END DO
            END IF

! REPORTA LA TOLERANCIA DE CONVERGENCIA Y NUMERO MAXIMO
DE ITERACIONES

                WRITE(8,26)MVAbase, toler, maxiter
26             FORMAT(2/,CONDICIONES           DE           LA
SIMULACION',2/,10X,POTENCIA BASE (MVA) = ',F6.2,&
                1/,10X,TOLERANCIA DE CONVERGENCIA =
',F6.4,&
                1/,10X,NO. DE ITERACIONES MAXIMA = ',I3)

                WRITE(6,27)
27             FORMAT(>> TERMINO SATISFACTORIAMENTE LA
LECTURA DE DATOS)

            END SUBROUTINE LEEDATOS

SUBROUTINE MATRIZYBUS

            USE mData01
            IMPLICIT NONE
            INTEGER(4) :: nodo, ele, renglon, columna !, trafo

                WRITE(6,24)
24             FORMAT(2/,>> INICIA RUTINA MATRIZ YBUS')
            PRINT *,>> MATRIZ YBUS, NUMERO DE NODOS = ',NOnodos

                ALLOCATE (angybus(NOnodos,NOnodos),
magYBUS(NOnodos,NOnodos))

! FORMA LA MATRIZ YBUS POR INSPECCION DE LA RED
! INICIALIZA LA MATRIZ YBUS
                magYBUS=0.0
                angYBUS=0.0

! LLENA LA DIAGONAL PRINCIPAL

                DO nodo = 1, NOnodos
                    DO ele = 1, NOele
                        IF(ind_tr(ele) .NE. 1) THEN
                            IF ( ( p(ele) .EQ. nodo )
.OR. ( q(ele) .EQ. nodo ) ) THEN

                                ybus(nodo,nodo)=ybus(nodo,nodo)+1.0/zpq(ele)+ypq2(ele)
                                END IF
                            END IF
                        END DO
                    END DO
                END DO

! LLENA LOS ELEMENTOS FUERA DE LA DIAGONAL PRINCIPAL

                DO ele = 1, NOele
                    IF(ind_tr(ele) .NE. 1) THEN
                        IF ( p(ele) .NE. 0 ) THEN
                            ybus(p(ele),q(ele)) = -1.0
/ zpq(ele) + ybus(p(ele),q(ele))
                            ybus(q(ele),p(ele)) =
ybus(p(ele),q(ele))
                        END IF
                    END IF
                END DO

! IMPRIME LA MATRIZ YBUS

                WRITE(8,25)
25             FORMAT(7/,13X,>> R E S U L T A D O S   D E L   P R O G R A
M A <<')

                WRITE(8,26)
26             FORMAT(2/,MATRIZ Ybus',1/)

                DO renglon=1, NOnodos
                    DO columna=1, NOnodos
                        IF ( ybus(renglon,columna) .NE.
(0.0,0.0) ) THEN

                            magYBUS(renglon,columna) = CABS(ybus(renglon, columna))

angYBUS(renglon,columna)=DATAN2D(DIMAG(ybus(renglon,columna)),DREA
L(ybus(renglon,columna)))

                            WRITE(8,27) renglon,
columna, ybus(renglon,columna), magYBUS(renglon,columna),
angYBUS(renglon,columna)
27             FORMAT(10X,'YBUS(',I2,',I2,')= ',F12.5,'
+',F12.5,5X,F8.3,1X,<',1X,F8.3)
                        END IF
                    END DO
                END DO

            PRINT *,>> TERMINO DE CALCULAR LA MATRIZ YBUS'

            END SUBROUTINE MATRIZYBUS

SUBROUTINE ERRORMED

            USE mData01
            IMPLICIT NONE
            INTEGER :: k, med
            REAL(8) :: incermax, incermin
            REAL :: R
            REAL(8) :: liminf, limsup

            incermax = 1.0 + (error/100.0)
            incermin = 1.0 - (error/100.0)
            CALL SEED(semilla)

```

```

!!      Genera los errores de medición de los flujos de potencia

DO k=1, NOmedF/2
    liminf=incermin*Pflujo(k)
    limsup=incermax*Pflujo(k)
    CALL RANDOM(R)
    Pflujo(k)= (R * (limsup - liminf)) + liminf
END DO

DO k=1, NOmedF/2
    liminf=incermin*Qflujo(k)
    limsup=incermax*Qflujo(k)
    CALL RANDOM(R)
    Qflujo(k)= (R * (limsup - liminf)) + liminf
END DO

!! Genera los errores de medicion para las inyecciones

DO k=1, NOmedI/2
    liminf=incermin*Piny(k)
    limsup=incermax*Piny(k)
    CALL RANDOM(R)
    Piny(k)= (R * (limsup - liminf)) + liminf
END DO

DO k=1, NOmedI/2
    liminf=incermin*Qiny(k)
    limsup=incermax*Qiny(k)
    CALL RANDOM(R)
    Qiny(k)= (R * (limsup - liminf)) + liminf
END DO

WRITE(8,35)
35  FORMAT(2/,18X,'MEDICIONES DE FLUJOS CO
N  E R R O R',&
        1/,24X,'(valores en p.u.)',&
        1/,20X,'N O D O',&
        1/,12X,'DATO',4X,'i',5X,'j',6X,'Pflujo',7X,'Qflujo')

DO med=1, NOmedF/2
    WRITE(8,36)med, i(med), j(med), Pflujo(med),
Qflujo(med)
36  FORMAT(12X,I3,I6,I6,3X,F9.5,4X,F9.5)
END DO

WRITE(8,37)
37  FORMAT(2/,18X,'MEDICIONES DE INYECCION
E S  C O N  E R R O R',&
        1/,24X,'(valores en p.u.)',&
        1/,12X,'DATO',4X,'NODO',6X,'Pflujo',7X,'Qflujo')

DO med=1, NOmedI/2
    WRITE(8,38)med, nod(med), Piny(med), Qiny(med)
38  FORMAT(12X,I3,I6,I6,3X,F9.5,4X,F9.5)
END DO

END SUBROUTINE ERRORMED

SUBROUTINE VARIANZA

USE mDATA01
IMPLICIT NONE
INTEGER(4) :: k
REAL(8), ALLOCATABLE :: mF(:), mV(:), ml(:)
ALLOCATE (mF(NOmedF/2), mV(NOmedV), ml(NOmedI/2))

!CALCULANDO LOS VALORES DE m

DO k=1, NOmedF/2
    mF(k) = sqrt((Pflujo(k)**2) + (Qflujo(k)**2))
END DO

DO k=1, NOmedV
    mV(k) = vs(k)
END DO

DO k=1, NOmedI/2
    ml(k) = sqrt((Piny(k)**2) + (Qiny(k)**2))
END DO

!CALCULANDO LA DESVIACION ESTANDAR (FORMULA)

DO k=1, NOmedF/2
    sigmaF(k) = ((0.02 * mF(k)) + (0.0052 * feF(k))) / 3
END DO

DO k=1, NOmedV
    sigmaV(k) = ((0.02 * mV(k)) + (0.0052 * feV(k))) / 3
END DO

DO k=1, NOmedI/2
    sigmaI(k) = ((0.02 * ml(k)) + (0.0052 * feI(k))) / 3
END DO

END SUBROUTINE VARIANZA

SUBROUTINE VECTORESTADO

USE mDATA01
IMPLICIT NONE
INTEGER(4) :: k, l, m, n, t
ALLOCATE (VectorEdo((2*NOodos)-1), z(NOmed),
Var(NOmed,NOmed), W(NOmed,NOmed))
ALLOCATE (angEdo(NOodos), magEdo(NOodos))

! INICIALIZANDO EL VECTOR DE ESTADO CON PERFIL PLANO (Vi=1.0 &
0i=0.0)

Var = 0.0
W = 0.0
m = 0

DO k=1, NOodos
    angEdo(k) = 0.0
    IF(k .NE. refer)THEN
        m=m+1
        VectorEdo(m) = angEdo(k)
    END IF
END DO

```

```

                END IF
            END DO

            n=NOodos-1
            DO l=1, NOodos
                magEdo(l)=1.0
                n=n+1
                VectorEdo(n) = magEdo(l)
            END DO
            WRITE(8,10)
10          FORMAT(2/,Vector de Estado inicial "x",1/)

            DO k=1, (2*NOodos)-1
                WRITE(8,11)k, VectorEdo(k)
11          FORMAT(10X,'x(',I2,')=',F5.3)
            END DO

! FORMANDO EL VECTOR DE MEDICIONES M DE TAMAÑO (Nomed)

            DO k=1, NOmedF/2
                z(k)=Pflujo(k)
            END DO

            m=NOmedF/2
            DO l=1, NOmedF/2
                m=m+1
                z(m)=Qflujo(l)
            END DO

            n=NOmedF
            DO t=1, NOmedV
                n=n+1
                z(n)=vs(t)
            END DO

            n = NOmedF+NOmedV
            DO t=1, NOmedI/2
                n=n+1
                z(n)=Piny(t)
            END DO

            n = NOmedF+NOmedV+NOmedI/2
            DO t=1, NOmedI/2
                n=n+1
                z(n)=Qiny(t)
            END DO

            WRITE(8,12)
12          FORMAT(2/,Vector de Mediciones "z",1/)

            DO k=1, NOmed
                WRITE(8,13)k, z(k)
13          FORMAT(10X,'z(',I2,')=',F8.5)
            END DO

! FORMANDO LA MATRIZ DE VARIANZAS R

            DO k=1, NOmedF/2
                Var(k,k)=sigmaF(k)**2
            END DO

                m=NOmedF/2
                DO l=1, NOmedF/2
                    m=m+1
                    Var(m,m)=sigmaF(l)**2
                END DO

                n=NOmedF
                DO t=1, NOmedV
                    n=n+1
                    Var(n,n)=sigmaV(t)**2
                END DO

                n = NOmedF+NOmedV
                DO t=1, NOmedI/2
                    n=n+1
                    Var(n,n)=sigmaI(t)**2
                END DO

                n = NOmedF+NOmedV+NOmedI/2
                DO t=1, NOmedI/2
                    n=n+1
                    Var(n,n)=sigmaI(t)**2
                END DO

14          WRITE(8,14)
                FORMAT(2/,Matriz de Varianzas "R",1/)

                DO k=1, NOmed
                    WRITE(8,15) k, k, Var(k,k)
15          FORMAT(10X,'Var(',I2,',I2,')=',F10.8)
                END DO

! FORMANDO LA MATRIZ DE PESOS W

                DO k=1, NOmed
                    W(k,k)=1/(Var(k,k))
                END DO

18          WRITE(8,18)
                FORMAT(2/,Matriz de Pesos "W",1/)

                DO k=1, NOmed
                    WRITE(8,19) k, k, W(k,k)
19          FORMAT(10X,'W(',I2,',I2,')=',F20.8)
                END DO

            END SUBROUTINE VECTORESTADO

SUBROUTINE RESIDUOSZ

            USE mDATA01
            IMPLICIT NONE
            INTEGER :: k, m, n
            REAL(8) :: Gij, Bij, Ys, thetaij, aux1, aux2, aux3
            COMPLEX(8) :: Ykm

            Picalc = 0.0
            Qicalc = 0.0

```

```

DO k=1, NOmedF/2
    thetaij = angEDO(i(k))-angEdo(j(k))
    DO m = 1, NOele
        IF ((p(m) .EQ. i(k)) .AND. (q(m) .EQ.
j(k))) THEN
            Ys=AIMAG(ypq2(m))
            Ykm=1.0/zpq(m)
        ELSE IF ((p(m) .EQ. j(k)) .AND. (q(m)
.EQ. i(k))) THEN
            Ys=AIMAG(ypq2(m))
            Ykm=1.0/zpq(m)
        END IF
    END DO
    Gij = DREAL(Ykm)
    Bij = DIMAG(Ykm)
    aux1 = magEdo(i(k)) * magEdo(j(k))
    aux2 = (Gij * DCOS(thetaij)) + (Bij * DSIN(thetaij))
    aux3 = (-1.0*Gij * DSIN(thetaij)) + (Bij *
DCOS(thetaij))
    Pijcalc(k) = ((magEdo(i(k))**2)*Gij) - (aux1 * aux2)
    Qijcalc(k) = (aux1 * aux3) -
((magEdo(i(k))**2)*(Bij+Ys))
END DO

DO k=1, NOmedI/2
    DO n=1, NOnodos
        thetaij = angEdo(nod(k)) - angEdo(n)

        Picalc(k) = Picalc(k) +
(magEdo(nod(k)) * magEdo(n) * ((DREAL(Ybus(nod(k),n))* DCOS(thetaij)) +
(DIMAG(Ybus(nod(k),n)) * DSIN(thetaij))))
        Qicalc(k) = Qicalc(k) +
(magEdo(nod(k)) * magEdo(n) * ((DREAL(Ybus(nod(k),n))* DSIN(thetaij)) -
(DIMAG(Ybus(nod(k),n)) * DCOS(thetaij))))
    END DO
END DO

! FORMA EL VECTOR h(x)

m = NOmedF/2
DO k=1, NOmedF/2
    hx(k) = Pijcalc(k)
    hx(m+k) = Qijcalc(K)
END DO

m = NOmedF
DO k=1, NOmedV
    hx(m+k) = magEDO(dt(k))
END DO

m = NOmedF + NOmedV
DO k=1, NOmedI/2
    hx(m+k) = Picalc(k)
    hx(m+k+NOmedI/2) = Qicalc(k)
END DO

! CALCULA EL VECTOR deltaZ

DO k=1, NOmedF
    deltaz(k) = z(k) - hx(k)
END DO
DO k=NOmedF+1, NOmedF + NOmedV
    deltaz(k) = ABS(z(k)) - ABS(hx(k))
END DO
DO k=NOmedF+NOmedV+1, NOmed
    deltaz(k) = z(k) - hx(k)
END DO

! IMPRIME EL VECTOR deltaZ
WRITE(8,10)
10 FORMAT(2,'Vector deltaZ',1/)

DO k=1, NOmed
    WRITE(8,11) k, deltaZ(k)
11 FORMAT(10X,'deltaZ',12,'1)=-',F20.8)
END DO

END SUBROUTINE RESIDUOSZ
SUBROUTINE JACOBIANOH

USE mDATA01
IMPLICIT NONE
INTEGER(4) :: k, m, l, n
REAL(8) :: Gij, Bij, Ys, thetaij
COMPLEX(8) :: Ykm

H=(0.0)
H1=(0.0)
H2=(0.0)
H3=(0.0)
H4=(0.0)
H5 = 0.0
H6 = 0.0
H7 = 0.0
H8 = 0.0

DO k=1, NOmedF/2
    thetaij = angEDO(i(k))-angEdo(j(k))
    DO m = 1, NOele
        IF ((p(m) .EQ. i(k)) .AND. (q(m) .EQ.
j(k))) THEN
            Ys=AIMAG(ypq2(m))
            Ykm = 1.0/zpq(m)
        ELSE IF ((p(m) .EQ. j(k)) .AND. (q(m)
.EQ. i(k))) THEN
            Ys=AIMAG(ypq2(m))
            Ykm = 1.0/zpq(m)
        END IF
    END DO
    Gij = DREAL(Ykm)
    Bij = DIMAG(Ykm)
    ! H1 = dPij/Dtheta
    ! H2 = dPij/dV
    ! H3 = dQij/dtheta
    ! H4 = dQij/dV

    ! PARCIAL DE Pij CON RESPECTO A THETAi
    H1(k,i(k)) =
(magEdo(i(k))*magEdo(j(k)))*(Gij*DSIN(thetaij)-Bij*DCOS(thetaij))

```

```

! PARCIAL DE Pij CON RESPECTO A THETAj
      H1(k,j(k)) = (magEdo(i(k))*magEdo(j(k)))*(Bij*DCOS(thetaij)-Gij*DSIN(thetaij))
END DO

! PARCIAL DE Pij CON RESPECTO A Vi
      H2(k,i(k)) = (2.0*Gij*magEdo(i(k)))-
(magEdo(j(k))*(Gij*DCOS(thetaij)+Bij*DSIN(thetaij)))

! PARCIAL DE Pij CON RESPECTO A Vj
      H2(k,j(k)) = -
1.0*magEdo(i(k))*(Gij*DCOS(thetaij)+Bij*DSIN(thetaij))
! PARCIAL DE Qij CON RESPECTO A THETAi
      H3(k,i(k)) = (-
1.0*magEdo(i(k))*magEdo(j(k))*(Gij*DCOS(thetaij)+Bij*DSIN(thetaij))

! PARCIAL DE Qij CON RESPECTO A THETAj
      H3(k,j(k)) =
(magEdo(i(k))*magEdo(j(k))*(Gij*DCOS(thetaij)+Bij*DSIN(thetaij))

! PARCIAL DE Qij CON RESPECTO A Vi
      H4(k,i(k)) = (magEdo(j(k))*(Bij*DCOS(thetaij)-
Gij*DSIN(thetaij)))-(2.0*magEdo(i(k))*(Bij+Ys))

! PARCIAL DE Qij CON RESPECTO A Vj
      H4(k,j(k)) = magEdo(i(k))*(Bij*DCOS(thetaij)-
Gij*DSIN(thetaij))

      END DO

!H5 = dPi/dtheta
!H6 = dPi/dV
!H5 = dQi/dtheta
!H6 = dQi/dV

! CÁLCULO DE JACOBIANOS H5, H6, H7, H8 PARA INYECCIONES DE
POTENCIA

DO k=1, NOmedI/2
! PARCIAL DE Pi CON RESPECTO A THETAi
      DO m=1, NONodos
          thetaij = angEdo(nod(k)) - angEdo(m)
          H5(k,nod(k)) = H5(k,nod(k)) + (magEdo(nod(k)) *
magEdo(m) * ((-1.0 * DREAL(Ybus(nod(k), m)) *
DSIN(thetaij)) + (DIMAG(Ybus(nod(k), m))
*DCOS(thetaij))))
      END DO
          H5(k,nod(k)) = H5(k,nod(k)) - (magEdo(nod(k))*2 *
DIMAG(Ybus(nod(k),nod(k))))

! PARCIAL DE Pi CON RESPECTO A THETAj
      DO m=1, NONodos
          IF (m .NE. nod(k)) THEN
              thetaij = angEdo(nod(k)) - angEdo(m)
              H5(k, m) = magEdo(nod(k)) *
magEdo(m) * ((DREAL(Ybus(nod(k),m)) * DSIN(thetaij)) -
(DIMAG(Ybus(nod(k),m)) * DCOS(thetaij)))
          END IF
      END DO

      END DO

DO k=1, NOmedI/2
! PARCIAL DE Qi CON RESPECTO A THETAi
      DO m=1, NONodos
          thetaij = angEdo(nod(k)) - angEdo(m)
          H7(k,nod(k)) = H7(k,nod(k)) + (magEdo(nod(k)) *
magEdo(m) * ((DREAL(Ybus(nod(k), m)) * DCOS(thetaij)) +
(DIMAG(Ybus(nod(k), m)) *DSIN(thetaij))))
      END DO
          H7(k,nod(k)) = H7(k,nod(k)) - (magEdo(nod(k))*2 *
DREAL(Ybus(nod(k),nod(k))))

! PARCIAL DE Qi CON RESPECTO A THETAj
      DO m=1, NONodos
          IF (m .NE. nod(k)) THEN
              thetaij = angEdo(nod(k)) - angEdo(m)
              H7(k, m) = -1.0 * magEdo(nod(k)) *
magEdo(m) * ((DREAL(Ybus(nod(k),m)) * DCOS(thetaij)) +
(DIMAG(Ybus(nod(k),m))
*DSIN(thetaij))))
          END IF
      END DO

      END DO

DO k=1, NOmedI/2
! PARCIAL DE Qi CON RESPECTO A Vi
      DO m=1, NONodos
          thetaij = angEdo(nod(k)) - angEdo(m)
          H8(k,nod(k)) = H8(k,nod(k)) + magEdo(m) *
((DREAL(Ybus(nod(k),m)) * DSIN(thetaij)) -
(DIMAG(Ybus(nod(k), m))
*DCOS(thetaij)))
      END DO
          H8(k,nod(k)) = H8(k,nod(k)) - (magEdo(nod(k)) *
DIMAG(Ybus(nod(k),nod(k))))

```



```

!PARCIAL DE Qi CON RESPECTO A Vj
DO m=1, NO nodos
    IF (m .NE. nod(k)) THEN
        thetaij = angEdo(nod(k)) - angEdo(m)
        H8(k, m) = magEdo(nod(k)) *
((DREAL(Ybus(nod(k),m)) * DSIN(thetaij)) -
        (DIMAG(Ybus(nod(k),m)) * DCOS(thetaij)))
    END IF
END DO
! LLENANDO EL JACOBIANO H CON LAS SUBMATRICES ANTERIORES
DO k=1, NOmedF/2
    l=0
    DO m=1, NO nodos
        IF(m .NE. refer)THEN
            l=l+1
            H(k,l) = H1(k,m)
            H(k+NOmedF/2,l) =
H3(k,m)
        END IF
    END DO
END DO
DO k=1, NOmedF/2
    DO m=NO nodos, (2*NO nodos)-1
        H(k,m)=H2(k,m-(NO nodos-1))
        H(k+NOmedF/2,m)=H4(k,m-
(NO nodos-1))
    END DO
END DO
k = NOmedF
DO m=1, NOmedV
    k=k+1
    H(k,(NO nodos-1)+dt(m))=1.0
END DO
n = NOmedF+NOmedV
DO k=1, NOmedI/2
    l=0
    DO m=1, NO nodos
        IF(m .NE. refer)THEN
            l=l+1
            H(k+n,l) = H5(k,m)
            H(k+n+NOmedI/2,l) =
H7(k,m)
        END IF
    END DO
END DO
DO k=1, NOmedI/2
    DO m=NO nodos, (2*NO nodos)-1
        H(k+n,m)=H6(k,m-(NO nodos-1))
        H(k+n+NOmedI/2,m)=H8(k,m-
(NO nodos-1))
    END DO
END DO
! IMPRIME EL JACOBIANO H
WRITE(8,10)
10 FORMAT(2,'Jacobiano "H"',1/)
DO k=1, NOmed
    DO m=1, (2*NO nodos)-1
        WRITE(8,11) k, m, H(k,m)
11 FORMAT(10X,H('I2','I2,')=.F20.8)
    END DO
END DO
!TRANSPONIENDO LA MATRIZ JACOBIANA H
Htrans=TRANPOSE(H)
! IMPRIME EL JACOBIANO H TRANSPUESTO
WRITE(8,12)
12 FORMAT(2,'Jacobiano Transpuesto "Htrans"',1/)
DO m=1, (2*NO nodos)-1
    DO k=1, NOmed
        WRITE(8,13) m, k, Htrans(m,k)
13
    FORMAT(10X,Htrans('I2','I2,')=.F20.8)
    END DO
END DO
END SUBROUTINE JACOBIANO H
SUBROUTINE MATRIZGANANCIA
USE mDATA01
IMPLICIT NONE
INTEGER(4) :: m, k
Mult1=0.0
CALL MRRRR((2*NO nodos)-1,NOmed,Htrans,(2*NO nodos)-
1,NOmed,NOmed,W,NOmed,(2*NO nodos)-
1,NOmed,Mult1,(2*NO nodos)-1)
! IMPRIME Mult1
WRITE(8,10)
10 FORMAT(2,'Mult1 "Htrans*W"',1/)
DO m=1, (2*NO nodos)-1
    DO k=1, NOmed
        WRITE(8,13) m, k, Mult1(m,k)
13
    FORMAT(10X,Mult1('I2','I2,')=.F20.8)
    END DO
END DO

```

```

CALL MRRRR((2*NOndos)-1,NOmed,Mult1,(2*NOndos)-
1,NOmed,(2*NOndos)-1,H,NOmed,(2*NOndos)-
,(2*NOndos)-1,G,(2*NOndos)-1)

WRITE(8,11)
11 FORMAT(2/,Matriz de Ganancia "G",1/)
DO m=1, (2*NOndos)-1
    DO k=1, (2*NOndos)-1
        IF (G(m,k) .NE. 0.0)THEN
            WRITE(8,14) m, k,
14
FORMAT(10X,'G(',I2,',',I2,')=',F20.8)
END IF
        END DO
    END DO
END DO

END SUBROUTINE MATRIZGANANCIA

```

**SUBROUTINE SISTEMAEST**

```

USE mDATA01
IMPLICIT NONE
INTEGER(4) :: k, l

CALL MRRRR((2*NOndos)-1,NOmed,Mult1,(2*NOndos)-
1,NOmed,1,deltaZ,NOmed,(2*NOndos)- 1,
1,Mult2,(2*NOndos)-1)

WRITE(8,10)
10 FORMAT(2/,Mult2 "Mult1*deltaZ",1/)

DO k=1, (2*NOndos)-1
    WRITE(8,14) k, Mult2(k)
14 FORMAT(10X,'Mult2(',I2,')=',F20.8)
END DO

CALL LSLRG ((2*NOndos)-1,G,(2*NOndos)-1,Mult2,1,deltaX)
WRITE(8,11)
11 FORMAT(2/,vector deltaX',1/)
DO k=1, (2*NOndos)-1
    WRITE(8,15) k, deltaX(k)
15 FORMAT(10X,'deltaX(',I2,',1)=',F20.8)
END DO

l=0
! ACTUALIZA EL VECTOR DE ESTADO QUE TIENE ANGULO THETA Y
VOLTAJES

DO k=1, NOndos
    IF (k .NE. refer) THEN
        l = l+1
        angEdo(k) = angEdo(k) + deltaX(l)
        vectorEdo(l) = angEdo(k)
    END IF
END DO

l = NOndos-1
DO k=1, NOndos
    l=l+1

```

```

magEdo(k) = magEdo(k) + deltaX(l)
vectorEdo(l) = magEdo(k)

END DO

l=0
DO k=1, (2*NOndos)-1
    IF(ABS(deltax(k)) .LE. toler)THEN
        l=l+1
        IF(1 .EQ. (2*NOndos)-1)THEN
            conver=1
        ELSE
            conver=0
        END IF
    END IF
END DO

END SUBROUTINE SISTEMAEST

```

**SUBROUTINE FLUJOS**

```

USE mDATA01
IMPLICIT NONE
INTEGER :: k, m, l, n, t, ele, nodo, trafo
REAL(8) :: Gij, Bij, Ys, thetaij, aux1, aux2, aux3, FuncObj
COMPLEX(8) :: Ykm, perdidatotal

ALLOCATE (Spq(NOele), Sqp(NOele), Volt(NOndos),
perdidas(NOele), Pnod(NOndos), Qnod(NOndos))

! CALCULA LOS FLUJOS DE POTENCIA FINALES, YA CON LOS
VOLTAJES Y ANGULOS ESTIMADOS

DO nodo=1, NOndos
    !pasar theta de grad a rad
    !aux2=aux2*3.141592/180
    E(nodo)=
magEdo(nodo)*(DCOS(angEdo(nodo))+(0.0,1.0)*DSIN(angEdo(nodo)))
END DO

DO ele = 1, NOele
! CALCULA EL CONJUGADO DE LOS FLUJOS DE POTENCIA DEL
ELEMENTO (ele)
    IF (ind_tr(ele) .EQ. 0) THEN
        Spq(ele) = DCONJG(E(p(ele))) * ((
(E(p(ele))) - (E(q(ele))))*(1.0 / (zpq(ele)))) +
(E(p(ele)))*(ypq2(ele)))* MVAbase
        Sqp(ele) = DCONJG(E(q(ele))) * ((
(E(q(ele))) - (E(p(ele))))*(1.0 / (zpq(ele)))) +
(E(q(ele)))*(ypq2(ele)))* MVAbase
    ELSE IF (ind_tr(ele) .EQ. 1) THEN
        DO trafo=1,NOTransf
            IF((p(ele) .EQ. a(trafo))
.AND. (q(ele) .EQ. b(trafo)))THEN
                Spq(ele) =
DCONJG(E(p(ele))) * (((tap(trafo)*E(p(ele))) - (E(q(ele)))) *
(-1.0*ybus(p(ele),q(ele)))) * MVAbase

```

```

Sqp(ele) = WRITE(8,10)
DCONJG(E(q(ele))) * ((E(q(ele)))/tap(trafo) - (E(p(ele)))) *
10 FORMAT(3, 'VOLTAJES NODALES ESTIMADOS', 1/)
(-1.0*ybus(p(ele),q(ele))) * MVAbase DO k=1, NOndos
ELSE IF ((p(ele) .EQ. WRITE(8,11) k, magEdo(k), angEdo(k)
b(trafo)) .AND. (q(ele) .EQ. a(trafo))) THEN 11 FORMAT(7X, 'NODO', I2, '=
'F15.11, 1X, '<', 1X, F15.11)
Sqp(ele) = END DO
DCONJG(E(p(ele))) * ((E(p(ele)))/tap(trafo) - (E(q(ele)))) *
! IMPRIME LOS FLUJOS DE LAS LINEAS CALCULADOS CON LOS
(-1.0*ybus(p(ele),q(ele))) * MVAbase VOLTAJES ESTIMADOS
Sqp(ele) = WRITE(8,21)
DCONJG(E(q(ele))) * ((tap(trafo)*E(q(ele)) - (E(p(ele)))) *
21 FORMAT(2, 5X, 'FLUJOS DE POTENCIA DEL NODO "p" AL "q"
(-1.0*ybus(p(ele),q(ele))) * MVAbase ;:, 1/)
END IF DO ele = 1, NOele
END DO WRITE(8,22) p(ele), q(ele), Spq(ele)
END IF FORMAT(7X, 'DEL BUS', I2, 'AL BUS', I2, ' =
! CALCULOS DE LOS FLUJOS DE POTENCIA DEL ELEMENTO (ele) 'F12.5, '(MW)', ' + j', F12.5, '(MVAR)'
END DO
Sqp(ele) = DCONJG(Spq(ele)) WRITE(8,44)
Sqp(ele) = DCONJG(Sqp(ele)) 44 FORMAT(2, 5X, 'FLUJOS DE POTENCIA DEL NODO "q" A "p"
perdidas(ele) = Spq(ele) + Sqp(ele) ;:, 1/)
END DO DO ele = 1, NOele
! CALCULA EL ESTIMADO DE LAS MEDICIONES DE FLUJO PARA PODER WRITE(8,33) q(ele), p(ele), Spq(ele)
CALCULAR LOS RESIDUOS 33 FORMAT(7X, 'DEL BUS', I2, 'AL BUS', I2, ' =
DO k=1, NOmedF/2 'F12.5, '(MW)', ' + j', F12.5, '(MVAR)'
END DO
thetaj = angEDO(i(k)) - angEdo(j(k))
DO m = 1, NOele WRITE (8,55)
IF ((p(m) .EQ. i(k)) .AND. (q(m) .EQ. 55 FORMAT(2, 5X, 'PERDIDAS EN EL SISTEMA ELECTRICO DE
j(k))) THEN POTENCIA', 1/)
DO ele = 1, NOele
Ys = AIMAG(ypq2(m)) WRITE(8,66) q(ele), p(ele), perdidas(ele)
Ykm = 1.0/zpq(m) 66 FORMAT(7X, 'DEL BUS', I2, 'AL BUS', I2, ' =
ELSE IF ((p(m) .EQ. j(k)) .AND. (q(m) 'F12.5, '(MW)', ' + j', F12.5, '(MVAR)'
.EQ. i(k))) THEN perdidatotal = perdidatotal + perdidas(ele)
Ys = AIMAG(ypq2(m)) END DO
Ykm = 1.0/zpq(m)
END IF
END DO
! CALCULA LAS INYECCIONES DE POTENCIAS NODALES CON LOS
Gij = DREAL(Ykm) VOLTAJES ESTIMADOS
Bij = DIMAG(Ykm)
Pnod = 0.0
Qnod = 0.0
aux1 = magEdo(i(k)) * magEdo(j(k))
DO k=1, NOndos
aux2 = (Gij * DCOS(thetaj)) + (Bij * DSIN(thetaj)) DO m=1, NOndos
aux3 = (-1.0 * Gij * DSIN(thetaj)) + (Bij * thetaj = angEdo(k) - angEdo(m)
DCOS(thetaj)) Pnod(k) = Pnod(k) + (magEdo(k) *
magEdo(m) * ((DREAL(Ybus(k,m)) * DCOSD(thetaj)) + (DIMAG(Ybus(k,m)) *
DSIND(thetaj)))) + (DIMAG(Ybus(k,m)) *
Qnod(k) = Qnod(k) + (magEdo(k) *
magEdo(m) * ((DREAL(Ybus(k,m)) * DSIND(thetaj)) + (DIMAG(Ybus(k,m)) *
DCOSD(thetaj))))
END DO
! CONVIERTE EL ANGULO DE LOS NODOS A GRADOS
END DO
DO k=1, NOndos
angEdo(k) = (angEdo(k) * 180) / 3.14159265359
END DO
! IMPRIME LOS VOLTAJES NODALES FINALES ESTIMADOS
WRITE (8,80)

```



```

! IMPRIME RESULTADOS EN UNIDAD DE SALIDA
                                TOL = AMACH(4)
                                TOL = 10.*TOL

                                WRITE(8,10)
10    FORMAT(3,'DESCOMPOSICION EN VALORES SINGULARES
DEL JACOBIANO "H"',1/)
                                CALL LSVRR(NRA, NCA, G, LDA, IPATH, TOL, IRANK, SG,
                                UG, LDU, VG, LDV)

                                WRITE(8,11) IRANK
11    FORMAT(7X,'Rango del Jacobiano "H" =',I5)
                                ! IMPRIME RESULTADOS EN PANTALLA

                                CALL UMACH(2,6)
                                WRITE(6,*) 'IRANK = ', IRANK
12    FORMAT(2/,MATRIZ "U"',1/)
                                CALL WRRRN('UG', NRA, NRA, U, LDU, 0)
                                CALL WRRRN('SG', 1, NCA, S, 1, 0)
                                CALL WRRRN('VG', NCA, NCA, V, LDV, 0)

                                DO m=1, LDU
                                    DO k=1, NRA
                                        WRITE(8,13) m, k, U(m,k)
13    FORMAT(10X,'U(',I2,',',I2,')=',F20.8)
                                        END DO
                                END DO
                                ! IMPRIME RESULTADOS EN UNIDAD DE SALIDA

                                WRITE(8,20)
20    FORMAT(3,'DESCOMPOSICION EN VALORES SINGULARES
DE LA MATRIZ DE GANANCIA "G"',1/)

                                WRITE(8,21) IRANK
21    FORMAT(7X,'Rango de la matriz de Ganancia "G" =',I5)

                                WRITE(8,22)
22    FORMAT(2/,MATRIZ "U"',1/)

                                DO m=1, LDU
                                    DO k=1, NRA
                                        WRITE(8,23) m, k, UG(m,k)
23    FORMAT(10X,'U(',I2,',',I2,')=',F20.8)
                                        END DO
                                END DO

                                WRITE(8,14)
14    FORMAT(2/,VALORES SINGULARES "S"',1/)

                                DO m=1, NCA
                                    WRITE(8,15) m, S(m)
15    FORMAT(10X,'S(',I2,')=',F20.8)
                                END DO

                                WRITE(8,18)
18    FORMAT(2/,NUMERO DE ACONDICIONAMIENDO k2',1/)

                                k2H = S(1) / S(IRANK)

                                WRITE(8,19) k2H
19    FORMAT(10X,'k2H =',F20.8)

                                WRITE(8,16)
16    FORMAT(2/,MATRIZ "V"',1/)

                                DO m=1, LDV
                                    DO k=1, NCA
                                        WRITE(8,17) m, k, V(m,k)
17    FORMAT(10X,'V(',I2,',',I2,')=',F20.8)
                                        END DO
                                END DO

                                !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! CALCULA LOS VALORES SINGULARES PARA LA MATRIZ DE
GANANCIA G
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

                                NRA=(2*NOodos)-1
                                NCA=(2*NOodos)-1
                                LDA=NRA
                                LDU=NRA
                                LDV=NCA

                                ALLOCATE(UG(LDU,NRA), VG(LDV,NCA), SG(NCA))

! CALCULA TODOS LOS VECTORES SINGULARES

                                IPATH = 11

                                WRITE(8,24)
24    FORMAT(2/,VALORES SINGULARES "S"',1/)

                                DO m=1, NCA
                                    WRITE(8,25) m, SG(m)
25    FORMAT(10X,'S(',I2,')=',F20.8)
                                END DO

                                WRITE(8,28)
28    FORMAT(2/,NUMERO DE ACONDICIONAMIENDO k2',1/)

                                k2G = SG(1) / SG(IRANK)

                                WRITE(8,29) k2G
29    FORMAT(10X,'k2G =',F20.8)

                                WRITE(8,26)
26    FORMAT(2/,MATRIZ "V"',1/)

                                DO m=1, LDV
                                    DO k=1, NCA
                                        WRITE(8,27) m, k, VG(m,k)
27    FORMAT(10X,'V(',I2,',',I2,')=',F20.8)
                                        END DO
                                END DO

                                END SUBROUTINE SVD

```